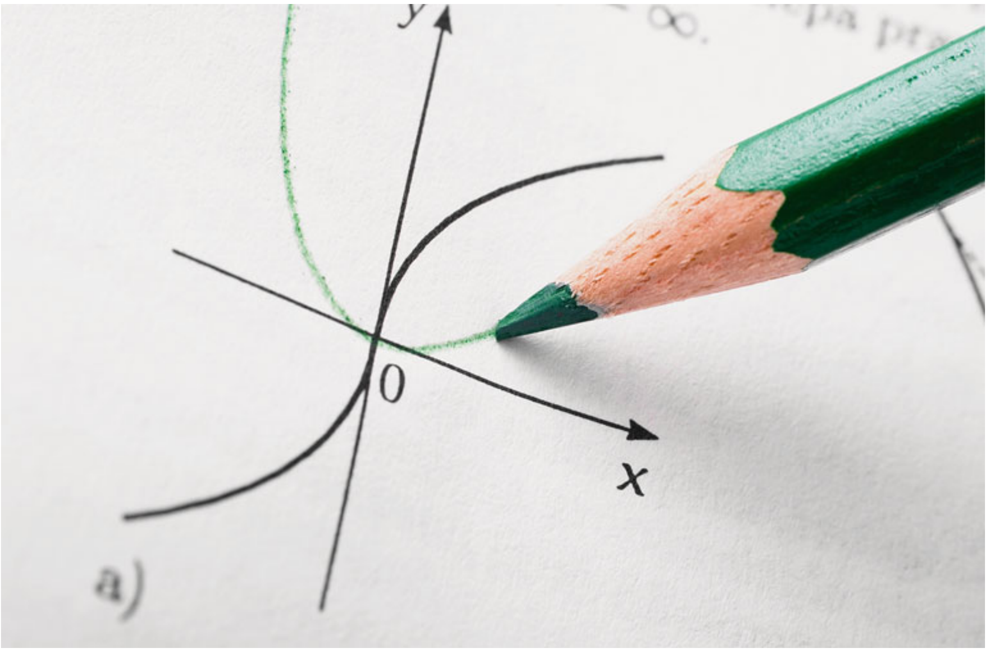
Grundlagen

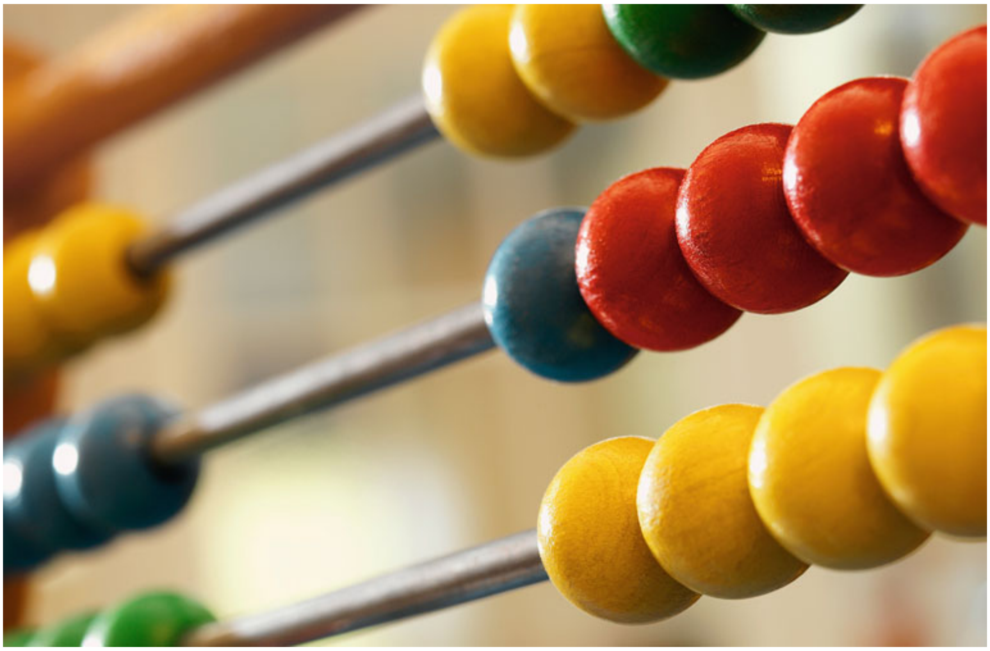
Teil I



Mengen, Zahlen und Gleichungen – das Handwerkszeug der Mathematik

1

Teil I



Welche Zahlenmengen können wir verwenden?

Wie geht man mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen um?

Wie löst man Gleichungen und Ungleichungen?

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_1

Bevor wir richtig in die Mathematik einsteigen, verschaffen wir uns einen Überblick über Mengen und Zahlen, die Grundbausteine der Mathematik. Viele der Begriffe, die wir im Folgenden besprechen werden, sind dem Leser sicher schon aus der Schule bekannt. Nachdem wir diese Grundlagen wiederholt haben, wenden wir uns den Gleichungen zu. Wir diskutieren grundlegende Lösungsverfahren und zeigen, wie man häufig auftretende Probleme umschiffen kann. Im Anschluss daran untersuchen wir, wie sich Ungleichungen lösen lassen.

1.1 Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten

In der Alltagssprache benutzen wir häufig den Begriff „Menge" – jemand hat eine Menge Zeit, Geld oder auch Ärger. Umso erstaunlicher ist es, dass der Begriff der Menge mathematisch gar nicht so einfach zu fassen ist.

Definition

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit. Die Objekte, aus denen eine Menge besteht, heißen Elemente der Menge.

Bei den Elementen wird man in der Mathematik in erster Linie an Zahlen denken, aber natürlich können Mengen in der Praxis aus völlig beliebigen Objekten bestehen. Diese Elemente können sogar selbst auch wieder Mengen sein. So können wir beispielsweise von der Menge der Personen in einem Hörsaal (die Elemente sind hier einzelne Menschen) sprechen oder von der Menge der Mannschaften in der Fußball-Bundesliga (die Elemente sind hier Teams, die ihrerseits wieder als Mengen von Einzelpersonen aufgefasst werden können).

Diese intuitive, naive Festlegung des Mengenbegriffs geht auf *Georg Cantor* (1845–1918) zurück. Sie ist zwar einfach, birgt aber bei näherem Hinsehen einige Fallstricke. Um in sich widersprüchliche Definitionen von Mengen auszuschließen, muss man deutlich mehr mathematischen Aufwand treiben. Für unsere Zwecke genügt sie jedoch vollkommen.

Die Elemente einer Menge kann man aufzählen oder beschreiben

Ist die Menge endlich und enthält sie nicht allzu viele Elemente, so können wir sie **explizit** angeben, d. h. ihre Elemente aufzählen:

$$A = \{\text{Rose}, \text{Nelke}, \text{Primel}\}.$$

Mengen mit vielen Elementen oder unendliche Mengen werden meist durch eine **Beschreibung** charakterisiert, z. B.

$$B = \{x | x \text{ ist ein Haustier}\}.$$

Die Definition der Menge B bedeutet ausgeschrieben „B ist die Menge aller x mit der Eigenschaft: x ist ein Haustier".

Bei unendlichen Mengen ist es auch möglich, einige Elemente aufzuzählen, um zu verdeutlichen, welche Elemente zu der Menge gehören. So lässt sich die Menge der geraden natürlichen Zahlen schreiben als

$$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Wir schreiben $x \in M$, wenn das Element x zur Menge M gehört, anderenfalls $x \notin M$. Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt **leere Menge** und wird geschrieben als $\emptyset$ oder $\{\}$. Wir verwenden das Symbol $\emptyset$.

Aus zwei Mengen kann man neue Mengen bilden

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von einer Menge B, wenn jedes Element von A in B liegt, in Zeichen: $A \subset B$ oder $B \supset A$. Umgekehrt nennen wir B eine **Obermenge** von A.

Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Wenn A und B keine gemeinsamen Elemente enthalten, nennt man sie **disjunkt**.

Definition: Mengenoperationen

Durchschnitt, Vereinigung, (Mengen-)Differenz und Kreuzprodukt sind erklärt durch:

- **Durchschnitt** von A und B:
$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\}$$
- **Vereinigung** von A und B:
$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
- **Differenz** oder **Restmenge**:
$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$$
- **Kreuzprodukt** von A und B:
$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Beispiel

Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, \heartsuit\}$ gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, \heartsuit\}, \\ A \setminus B &= \{2, 3\}, \\ A \times B &= \{(1,1), (1,\heartsuit), (2,1), (2,\heartsuit), (3,1), (3,\heartsuit)\}. \end{aligned}$$ ◄

Eigenschaften der Mengenoperationen Schnitt, Vereinigung und Differenz

Schnitt mit der leeren Menge ergibt immer die leere Menge, und die Vereinigung mit der leeren Menge ergibt wieder die Menge selbst:

$$A \cap \emptyset = \emptyset\,, \quad A \cup \emptyset = A\,.$$

Schnittmengenbildung und Vereinigung sind kommutativ:

$$A \cap B = B \cap A\,, \quad A \cup B = B \cup A\,.$$

Bei Schnittmengenbildung und Vereinigung von mehr als zwei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge an:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,.$$

Für die Kombination von Schnittmengenbildung und Vereinigung gelten die folgenden Regeln:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

1.2 Aussagen, Gleichungen und Ungleichungen

Aussagen sind wahre oder falsche Behauptungen

Nicht nur im Alltag, sondern auch im Rahmen mathematischer Überlegungen formulieren wir Sachverhalte oft durch Aussagen.

Definition

Unter einer **Aussage** versteht man eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen

- „Paris ist eine Stadt“ (wahr)
- „Ein Hund ist eine Pflanze“ (falsch)
- $3 + 5 = 8$ (wahr)
- $7 < 1$ (falsch) ◄

Aussagen können wir zueinander in Beziehung setzen. Wenn aus einer Aussage A eine andere Aussage B folgt, so schreiben wir

$$A \Rightarrow B,$$

gesprochen „Aus A folgt B“. Man spricht hier von einer **Implikation**. So können wir beispielsweise die Beziehung „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ auch schreiben als „Es regnet (Aussage A)“ $\Rightarrow$ „Die Straße ist nass (Aussage B)“. Wenn aber $A \Rightarrow B$ gilt, so muss deshalb nicht auch $B \Rightarrow A$ gelten – dies ist eine ganz wichtige Beobachtung. In unserem Beispiel folgt aus „Die Straße ist nass“ nicht unbedingt, dass es regnet. Falls jedoch $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gilt, so heißen die beiden Aussagen A und B **äquivalent**, in Zeichen $A \Leftrightarrow B$. So sind die Aussagen „die Straße ist nass“ und „Es befindet sich Wasser auf der Straße“ äquivalent.

Wenn aus einer Aussage A die Aussage B folgt, wenn also $A \Rightarrow B$ vorliegt, dann wird A als **hinreichend** für B bzw. B als **notwendig** für A bezeichnet. So ist „Es regnet“ eine hinreichende Bedingung dafür, dass „Die Straße ist nass“ gilt. Andererseits ist die Bedingung „Die Straße ist nass“ notwendig für die Eigenschaft „Es regnet“.

Das Gegenteil der Aussage A kennzeichnen wir mithilfe eines Querbalkens: $\overline{A}$. Beachte: Wenn $A \Rightarrow B$ gilt, muss deshalb nicht $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ gelten. In obigem Beispiel heißt das: Wenn es nicht regnet ($\overline{A}$), folgt daraus nicht, dass die Straße trocken ($\overline{B}$) ist – es könnte ja jemand Wasser auf der Fahrbahn verschüttet haben. Andererseits gilt aber immer: Wenn $A \Rightarrow B$, dann $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, d. h., wenn B nicht gilt, kann auch A nicht gelten. In unserem Beispiel hieße das: wenn die Straße trocken ist, kann es nicht regnen. Wir bezeichnen diese Schlussweise als **Kontraposition** der Implikation $A \Rightarrow B$.

Implikationen können miteinander verknüpft werden: Wenn aus A die Aussage B folgt und aus B die Aussage C, dann folgt aus A auch schon C. Diese Technik, die wir als **Kettenschluss** bezeichnen, wird in der Mathematik oft eingesetzt, um komplizierte Folgerungen in einfache Schritte zu zerlegen.

Gleichungen und Ungleichungen sind Aussagen, die Variablen enthalten können

Wenn wir zwei mathematische Ausdrücke gleichsetzen, so entsteht eine Gleichung.

Gleichung

Unter einer Gleichung verstehen wir die Gleichsetzung zweier Ausdrücke. Enthalten diese Ausdrücke Variablen, so nennt man jeden Wert der Variablen, für den die Gleichung eine wahre Aussage ist, eine **Lösung** der Gleichung. Alle Lösungen einer Gleichung bilden zusammen die **Lösungsmenge** dieser Gleichung.

Beispiele für Gleichungen

- $2 + 3 = 5$
- $7 \cdot 8 = 40$

- $x + 3 = 9$
- $x^2 + 2x + 1 = 0$

Die erste Gleichung ist eine wahre Aussage, die zweite Gleichung eine falsche Aussage. Die dritte und vierte Gleichung sind nur für bestimmte Werte von x wahre Aussagen. ◄

In anderen Fällen ist es interessant, ob ein Ausdruck größer oder kleiner ist als ein anderer Ausdruck. Dies führt zum Begriff der Ungleichung.

Ungleichung

Wenn wir zwischen zwei Ausdrücken eine Anordnungsbeziehung herstellen, so entsteht eine Ungleichung. Beinhalten diese Ausdrücke Variablen, so nennt man wie oben jeden Wert der Variablen, für den die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt, eine **Lösung** der Ungleichung. Alle Lösungen einer Ungleichung bilden zusammen wieder die Lösungsmenge dieser Ungleichung.

Beispielsweise ist -2 kleiner als 1, mithin ist $-2 < 1$ eine wahre Aussage. Die Ungleichung

$$-2 < 1$$

kann man sowohl von links nach rechts lesen, also „-2 ist kleiner als 1", als auch von rechts nach links, also „1 ist größer als -2".

Häufig verwendet man die Schreibweise $a \leq b$ für „$a < b$ oder $a = b$" und $a \geq b$ für „$a > b$ oder $a = b$".

Hiermit gilt: $1 < 2$, $1 \leq 2$, $1 \leq 1$, $5 > 3$.

Achtung $1 \leq 1$ ist eine wahre Aussage, denn $1 \leq 1$ bedeutet, dass $1 < 1$ oder $1 = 1$ gilt. ◄

1.3 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Im Alltag verwenden wir verschiedene Zahlenmengen. Dabei haben wir im Laufe unsere Lebens unseren „Zahlenbereich" immer wieder erweitert. Im Kindergarten und in der Grundschule kommt man gut mit **natürlichen Zahlen** aus, also den Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, die man auch zum Zählen verwendet. Irgendwann stellt man fest, dass man auch „negative" Zahlen benötigt, und gelangt so zu den **ganzen Zahlen**. Noch etwas später sieht man, dass Divisionsaufgaben mit ganzen Zahlen nicht immer „aufgehen". So hat die Aufgabe, zwei Äpfel auf drei Kinder zu verteilen, keine „natürliche" Lösung. Aus diesem Grund erweitert man den Zahlbereich auf **rationale Zahlen**, also diejenigen Zahlen, die als Brüche darstellbar sind, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Bald merkt man, dass auch diese Zahlen für viele Zwecke nicht ausreichen. So lässt sich bereits die Länge der Diagonalen eines simplen Quadrats mit Kantenlänge 1 nicht als Bruchzahl darstellen. Daher verwenden wir in den Ingenieurwissenschaften meist **reelle Zahlen**. Reelle Zahlen können unterschiedlich dargestellt sein, als Brüche wie z. B. $\frac{1}{2}$ oder als Dezimalzahlen, wie z. B. 0.5. Manchmal haben diese Zahlen endlich viele Nachkommastellen, so wie $\frac{1}{2} = 0.5$, manchmal sogar unendlich viele wie $\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$ oder $\pi = 3.14159\ldots$ Die Menge der reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet. Ist x eine reelle Zahl, so sagt man „x ist ein Element von $\mathbb{R}$" und schreibt $x \in \mathbb{R}$. Man rechnet nicht nur mit gegebenen Zahlen, sondern auch mit Buchstaben bzw. Variablen. Eine Variable x ist Platzhalter für eine Zahl. Mit $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir also eine beliebige reelle Zahl.

Natürliche Zahlen sind die Grundlage unseres Zahlensystems

Zum Zählen verwenden wir die **natürlichen Zahlen** $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$; man bezeichnet sie mit $\mathbb{N}$. Je nach Anwendung nimmt man auch die Zahl 0 dazu und bezeichnet diese Zahlenmenge dann mit $\mathbb{N}_0$.

Ganze und rationale Zahlen braucht man zum Rechnen

Die **ganzen Zahlen** $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ werden verwendet, um addieren und subtrahieren zu können, ohne dass man die Menge verlassen muss. Sie werden mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Die Gleichung $x + 2 = 1$ kann für $x \in \mathbb{N}$ nicht gelöst werden. Sucht man dagegen eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$, so erhält man $x = -1$.

Die Zahlen $z_k = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, also $z_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $z_2 = 2 \cdot 2 = 4$, $z_3 = 2 \cdot 3 = 6, \ldots$, bilden die **geraden Zahlen**. Durch $z_k = 2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, also $z_0 = 1$, $z_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $z_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $z_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \ldots$, erhält man die **ungeraden Zahlen**.

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ bestehen aus den Brüchen $r = \frac{p}{q}$ mit dem Zähler $p \in \mathbb{Z}$ und dem Nenner $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, denn durch 0 darf man nicht dividieren. Dabei stellen zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{m}{n}$ genau dann die gleiche rationale Zahl dar, wenn $np = qm$. Beispiele sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1} = 2, \frac{4}{2} = 2, \ldots$ Aus $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$ erkennt man, dass diese Darstellung der rationalen Zahlen nicht eindeutig ist. Setzt man allerdings voraus, dass p, q keine gemeinsamen Teiler haben, so erhält man Eindeutigkeit: Da bei $\frac{4}{2}$ sowohl der Zähler $p = 4 = 2 \cdot 2$ als auch der Nenner $q = 2$ den gemeinsamen Teiler 2 besitzen, liefert das Kürzen des Bruches die Darstellung $\frac{4}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$.

Für die praktische Rechnung ist die **Dezimaldarstellung** $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{4} = 0.25$ üblich. Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl besitzt entweder endlich viele Nachkommastellen (abbrechende Dezimalzahl) wie z. B. $\frac{1}{2} = 0.5$ oder unendlich viele Nachkommastellen, mit einer Ziffernfolge, die sich periodisch wiederholt. Beispielsweise besitzt $\frac{3}{11} = 0.272727\ldots$ eine unendliche Dezimaldarstellung mit Periode 2, da sich die Ziffernfolge 27 immer wiederholt. Man schreibt $\frac{3}{11} = 0.\overline{27}$.

Die ganzen Zahlen bilden eine Teilmenge der rationalen Zahlen, d. h., jede ganze Zahl ist auch rationale Zahl. Man schreibt kurz $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Wenn auch rationale Zahlen nicht mehr reichen, füllen reelle Zahlen die Lücken

Im technisch-wissenschaftlichen Umfeld arbeiten wir mit den **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Alle reellen Zahlen kann man auf der **Zahlengeraden** eintragen (Abb. 1.1). In der Mitte der Zahlengeraden befindet sich die Null. Rechts von der Null werden in ansteigender Größe die **positiven Zahlen** ($x > 0$) angeordnet, während links von der Null die **negativen Zahlen** ($x < 0$) in entsprechender Weise platziert werden.

Die reellen Zahlen umfassen dabei die rationalen Zahlen, d. h., es gilt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, und die **irrationalen Zahlen**. Irrationale Zahlen sind Dezimalzahlen, die nicht abbrechen und deren Ziffernfolge nicht periodisch ist.

Werfen wir hierbei einmal einen genaueren Blick auf die **Quadratwurzel** einer nichtnegativen Zahl. Für $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ (d. h., y nichtnegativ) ist die Quadratwurzel $\sqrt{y}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = y$. Da das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, ist auch $-\sqrt{y} < 0$ eine Lösung dieser Gleichung. Für $y \neq 0$ hat die Gleichung $x^2 = y$ also zwei verschiedene Lösungen, die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden. Als Quadratwurzel einer positiven Zahl ist aber stets die positive Lösung definiert.

Die Quadratwurzel einer positiven Zahl kann eine rationale Zahl sein. Beispielsweise ist $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$. Es gibt aber auch positive Zahlen, deren Quadratwurzel nicht rational ist. Die Quadratwurzel aus 2 ist mit $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, bei denen sich kein Wiederholungsmuster ergibt, deren Ziffernfolge also nicht periodisch ist. Derartige Zahlen lassen sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Wir bezeichnen sie daher als **irrationale Zahlen**. Weitere wichtige irrationale Zahlen sind $\mathrm{e} = 2.718281828\ldots$ und $\pi = 3.141592654\ldots$

Wird nun die Menge aller rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen ergänzt, so erhalten wir hieraus die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Betrachtung irrationaler Zahlen ist durchaus sinnvoll. Wir finden irrationale Zahlen in vielen Anwendungen. So hat beispielsweise die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 die Länge $\sqrt{2}$. In der Praxis runden wir allerdings, je nach benötigter Genauigkeit, ab einer bestimmten Nachkommastelle die Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl, sodass wir wieder eine rationale Zahl als Näherungswert erhalten. Wir sagen daher, dass jede irrationale Zahl beliebig genau rational approximiert werden kann.

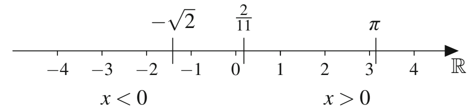


Abb. 1.1 Zahlengerade: Jede reelle Zahl kann dort eintragen werden

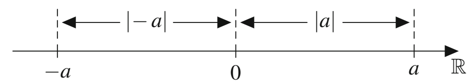


Abb. 1.2 Der Betrag von a, dargestellt als $|a|$, entspricht auf der Zahlengeraden dem Abstand der Zahl vom Nullpunkt

Für den Alltagsgebrauch reicht es somit aus, sich die rationalen Zahlen als endliche oder unendlich periodische Dezimalzahlen und die reellen Zahlen allgemeiner als endliche oder unendliche Dezimalzahlen, zu denen auch die rationalen Zahlen gehören, vorzustellen. Es gilt der folgende Teilmengenzusammenhang:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Zwei reelle Zahlen sind **gleich**, wenn sie dieselbe Stelle auf der Zahlengeraden beschreiben, z. B. $\frac{1}{2} = 0.5$. Liegt die Zahl $a \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden weiter links als $b \in \mathbb{R}$, sagt man „a ist **kleiner** als b“ und schreibt $a < b$. Umgekehrt liegt dann $b \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden weiter rechts als $a \in \mathbb{R}$, d. h., „b ist **größer** als a“, und man schreibt $b > a$.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind **angeordnet**, was bedeutet, dass für zwei ungleiche Zahlen stets eine Zahl größer als die andere Zahl ist.

Der Betrag macht alles positiv

Definition

- Der **Betrag** einer Zahl $a \in \mathbb{R}$, dargestellt als $|a|$, entspricht dem Abstand von a zum Nullpunkt auf der Zahlengeraden (Abb. 1.2).
  Formal ist der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ erklärt durch
  $$|a| := \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$
  Man liest die Gleichung wie folgt: „Für $a \geq 0$ ist der Betrag $|a|$ gleich a. Für $a < 0$ ist der Betrag $|a|$ gleich $-a$.“
  Es gilt $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- Der **Abstand** zweier Zahlen a und b auf der Zahlengeraden ist gegeben durch $|a - b| = |b - a|$ (Abb. 1.3).

Mit dem Symbol $:=$ definiert man eine neue Größe oder eine Bezeichnungsweise. Auf der Seite mit dem Doppelpunkt steht der neue Begriff, z. B. das Symbol $|a|$, während auf der Seite mit dem Gleichheitszeichen die Bedeutung steht.

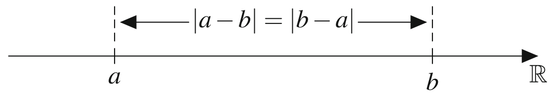


Abb. 1.3 $|a-b| = |b-a|$ stellt den Abstand zweier Zahlen a und b auf der Zahlengeraden dar

Die Zahlen 1 und 3 haben den Abstand $|3-1| = |2| = 2$. Die Zahlen -5 und 1 haben den Abstand $|-5-1| = |-6| = 6$.

Da das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ wird, kann wegen

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \begin{cases} \;\;x \geq 0, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x > 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag einer reellen Zahl auch durch

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

definiert werden.

Beispielsweise ist

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Rechenregeln für Beträge

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gelten folgende Rechenregeln und Eigenschaften im Zusammenhang mit dem Betrag:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x| \geq x$ sowie $|x| \geq -x$
4. $|xy| = |x||y|$, insbesondere folgt mit $y = -1$:
5. $|-x| = |x|$ und damit:
6. $|x-y| = |y-x|$
7. $|x| \leq a \iff -a \leq x$ und $x \leq a \iff -a \leq x \leq a$
8. $|x| \geq a \iff x \leq -a$ oder $x \geq a$
9. $|x| = a \iff x = a$ oder $x = -a$

Die Dreiecksungleichung ist eine der wichtigsten Ungleichungen überhaupt.

Satz (Dreiecksungleichung)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Die Dreiecksungleichung kann auf einfache Weise gezeigt werden. Wegen $|x| \geq \pm x$ und $|y| \geq \pm y$ gilt

$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|,$$

also

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Zudem ist

$$|x| + |y| \geq |x| + (-y) \geq (-x) + (-y) = -(x+y),$$

und somit gilt auch nach Addition von $x + y - (|x| + |y|)$

$$x + y \geq -(|x| + |y|).$$

Insgesamt ist also

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

was wir aufgrund der siebten Eigenschaft kürzer schreiben können:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Neben der Dreiecksungleichung können auch weitere nützliche Abschätzungen bewiesen werden.

Folgerungen aus der Dreiecksungleichung

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

1. $|x+y| \geq |x| - |y|$
2. $|x-y| \geq |x| - |y|$
3. $||x| - |y|| \geq |x| - |y|$

Diese drei Aussagen lassen sich auf ähnliche Weise aus der Dreiecksungleichung folgern. Als Beispiel zeigen wir, warum die zweite Aussage richtig ist: Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$|x-y| + |y| \geq |x|.$$

Bringen wir $|y|$ auf die andere Seite, erhalten wir die Aussage $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Intervalle sind Abschnitte auf der Zahlengeraden

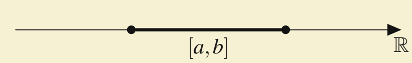
Die Darstellung zusammenhängender Teilmengen in $\mathbb{R}$ führt auf **Intervalle**, die sich als Abschnitte auf der Zahlengeraden einzeichnen lassen. Wir unterscheiden dabei offene, halboffene und abgeschlossene Intervalle.

Intervalle auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$

1. **Abgeschlossene Intervalle:** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann bezeichnet

   $$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

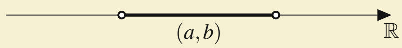
   das abgeschlossene Intervall von a bis b. Abgeschlossene Intervalle beinhalten also ihre Grenzen a und b. Für $a = b$ besteht das Intervall nur aus einem Punkt $[a, b] = \{a\} = \{b\}$. Das Intervall kann als Abschnitt auf der Zahlengeraden skizziert werden:



2. **Offene Intervalle:** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann bezeichnet

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

das offene Intervall von a bis b. Offene Intervalle beinhalten also nicht ihre Grenzen a und b und werden auf der Zahlengeraden mit lichten Endpunkten gekennzeichnet:



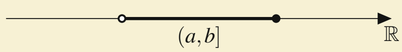
3. **Halboffene Intervalle:** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann bezeichnet

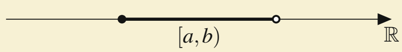
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

das linksoffene Intervall von a bis b und

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

das rechtsoffene Intervall von a bis b. Auf der Zahlengeraden werden die Endpunkte entsprechend markiert:





4. **Uneigentliche Intervalle:** Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{aligned}$$

uneigentliche Intervalle.

Achtung Das Symbol für „unendlich" ∞ ist keine Zahl! Dennoch benutzt man es gerne, um auszudrücken, dass ein Intervall links oder rechts unbeschränkt ist. ◀

Gelegentlich findet man die Kurzbezeichnungen

$$\mathbb{R}_+ := (0, \infty), \quad \mathbb{R}_- := (-\infty, 0), \quad \mathbb{R}^* := \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für ein beliebiges, nicht uneigentliches Intervall $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) mit $a < b$ wird mit der Differenz aus Obergrenze b und Untergrenze a die **Intervalllänge** $b - a$ bezeichnet. Die Intervalllänge stellt also eine Art Größenmaß für das Intervall dar, wobei dieses Größenmaß nur von den Grenzen a und b abhängt, unabhängig davon, ob die Grenzen dazugehören oder nicht. Dies hat also die Folge, dass (a, b) und $[a, b]$ dieselbe Intervalllänge $b - a$ haben, obwohl (a, b) gegenüber $[a, b]$ zwei Elemente fehlen.

1.4 Rechnen mit reellen Zahlen

Innerhalb der Menge $\mathbb{N}_0$ sind die Addition und die Multiplikation definiert. Die Umkehrung der Addition, die Subtraktion, kann auf eine Verallgemeinerung der Addition zurückgeführt werden, indem man die negativen Zahlen zusätzlich definiert und somit zur Definition der Menge der ganzen Zahlen motiviert wird.

Die Division führt als Umkehrung der Multiplikation zunächst auf die Definition des Kehrwertes bzw. der Brüche ganzer Zahlen und damit zur Menge der rationalen Zahlen.

Additive und multiplikative Abgeschlossenheit

1. Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$m + n \in \mathbb{N}_0, \quad m \cdot n \in \mathbb{N}_0.$$

2. Sind $m, n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$m + n \in \mathbb{Z}, \quad m \cdot n \in \mathbb{Z}, \quad m - n := m + (-n) \in \mathbb{Z}.$$

3. Sind $a, b \in \mathbb{Q}$, so gilt

$$\begin{aligned} a + b \in \mathbb{Q}, &\quad a \cdot b \in \mathbb{Q}, \\ a - b \in \mathbb{Q}, &\quad \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

für $b \neq 0$.

Die Subtraktion kann stets auf Addition und die Division auf die Multiplikation zurückgeführt werden.

Die reellen Zahlen bilden ein Kontinuum und werden durch die Zahlengerade veranschaulicht. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass jede irrationale Zahl durch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden kann. Man sagt, die Menge der rationalen Zahlen liegt **dicht** in der Menge der reellen Zahlen. So approximiert ein Rechner innerhalb eines gewissen Wertebereichs alle Zahlen in rationaler Weise.

1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Wiederholtes Multiplizieren führt zur Potenz

Für eine reelle Zahl a erklärt man die ***n*-te Potenz** durch

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man definiert $a^0 := 1$ und $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.

Teil I

1.1 Mathematischer Hintergrund: Addition und Multiplikation allgemeiner betrachtet – die Körperaxiome

Bei der Addition von zwei Elementen $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$ wird mit den beiden Elementen die Summe $z = x + y \in \mathbb{Q}$ gebildet. Formal wird also einem Element $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ein Element $z = x + y \in \mathbb{Q}$ zugeordnet. Man schreibt:

$$+ : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$:

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ (x, y) \mapsto x \cdot y \end{cases}$$

Zahlenmengen, die Subtraktion und Division gestatten, nennt man Körper, wenn sie bestimmte Eigenschaften haben:

Eine Menge K, in der eine Addition

$$+ : \begin{cases} K \times K \to K \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

sowie eine Multiplikation

$$\cdot : \begin{cases} K \times K \to K \\ (x, y) \mapsto x \cdot y \end{cases}$$

definiert sind, heißt **Körper**, falls für alle $x, y, z \in K$ gilt:

1. **Assoziativität:**

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x(yz) = (xy)z$$

Dieses Axiom erlaubt uns den Verzicht auf die Klammerung bei Summe und Produkt von mehr als zwei Zahlen. Es ist daher

$$x + y + z := x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$xyz := x(yz) = (xy)z.$$

2. **Kommutativität:**

$$x + y = y + x$$
$$xy = yx$$

3. **Existenz neutraler Elemente:**
Es gibt ein Nullement $0 \in K$ und ein Einselement $1 \in K$ mit

$$x + 0 = x,$$
$$x \cdot 1 = x.$$

4. **Existenz negativer und inverser Elemente:** Zu jedem $x \in K$ gibt es ein (eindeutig bestimmtes) negatives Element $-x \in K$ mit

$$x - x := x + (-x) = 0.$$

Zu jedem $x \in K$, $x \neq 0$ gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element $x^{-1} = \frac{1}{x} \in K$ mit

$$\frac{x}{x} := x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Dadurch sind neben der Addition und der Multiplikation auch eine Subtraktion und eine Division definiert.

5. **Distributivität**:

$$(x + y)z = xz + yz$$

Die Forderungen 1 bis 5 heißen **Körperaxiome**. Die Mengen der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen sind mit der in ihnen üblichen Addition und Multiplikation die prominentesten Beispiele für Körper. Die Mathematik bietet aber auch andere Beispiele für Körper.

Die Mengen der natürlichen und der ganzen Zahlen bilden keine Körper. Überlegen Sie sich, welche der Axiome aus der vorangegangenen Definition für diese Mengen nicht erfüllt sind.

Eine wichtige Eigenschaft der Körper ist ihre **Nullteilerfreiheit**, d. h., falls $a \cdot b = 0$ gilt, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass zwei von 0 verschiedene Elemente eines Körpers miteinander multipliziert stets wieder ein von 0 verschiedenes Element ergeben. Diese scheinbar banale Eigenschaft gilt beispielsweise nicht für die Multiplikation von Matrizen, die in der linearen Algebra in Abschn. 12.2 behandelt wird.

Im Ausdruck a^n ist a die **Basis** und n der **Exponent**. Insbesondere gilt $a^{-1} = \frac{1}{a}$ für $a \neq 0$.

Potenzgesetze

1. Bei gleicher Basis a gilt
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
und
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0.$$
2. Weiter gilt
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$
3. Bei gleichem Exponenten n gilt
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
und
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0.$$

Potenzen zur Basis 10 erleichtern den Umgang mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlen.

Wissenschaftliche Zahlendarstellung

Eine reelle Zahl x wird im wissenschaftlich/technischen Bereich häufig in der Form
$$x = d \cdot 10^e$$
dargestellt. Die reelle Zahl d heißt (vorzeichenbehaftete) **Mantisse**, und die ganze Zahl e ist der **Exponent**. Den Exponenten wählt man so, dass man für die Mantisse eine angenehme Größenordnung erhält.

Beispielsweise gilt: $0.003 = \frac{3}{1000} = \frac{3}{10^3} = 3 \cdot 10^{-3}$ und $0.000012 = 1.2 \cdot 10^{-5}$.

Zehnerpotenzen von Einheiten

Für Zehnerpotenzen einer Einheit verwendet man die Bezeichnungen aus Tab. 1.1. Wir können jetzt abschätzen: Mit einem Hektoliter (hl) Bier kann man schon eine schöne Party mit der Nachbarschaft feiern. Zwei bis drei Centiliter (cl) füllen ein Schnapsglas. Bei Schwingungen kommen große Vielfache der Einheit Hertz (Schwingungen pro Sekunde) vor: Hohe Töne liegen im Kilohertz-(kHz-)Bereich, UKW-Rundfunksender senden im Bereich von 100 Megahertz (MHz) und moderne Prozessoren haben eine Taktfrequenz im Bereich von Gigahertz (GHz). ◀

Tab. 1.1 Große und kleine Zehnerpotenzen

Name	Kurzform	Potenz
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hekto	h	10^2
Deka	–	10^1
Dezi	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

Bis jetzt sind die Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten erklärt.

Die **Quadratwurzel** einer Zahl $a \geq 0$, wir bezeichnen sie mit dem Symbol $\sqrt{a}$, ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt, z. B. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$. Wir suchen also nach der Lösung der Gleichung
$$x^2 = a, \quad x \geq 0.$$

Zu unterscheiden von der Wurzel ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = a$ für $a \geq 0$ ohne die Vorzeichenbeschränkung für x. Diese besteht aus den beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$, denn es gilt $\sqrt{a}^2 = a$ und $(-\sqrt{a})^2 = a$. Die zweite Lösung wird oft vergessen.

Achtung Die Wurzel von $a \geq 0$ ist immer eine nichtnegative Zahl. ◀

Definition

Die ***n*-te Wurzel** einer Zahl $a > 0$ ist erklärt als diejenige positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x^n = a$:
$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Schreibweise steht in Einklang mit der Regel $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Es gilt
$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Es gilt hier wie oben: $\sqrt[n]{a}$ ist das Symbol für die nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. Wurzeln sind also Potenzen mit **rationalen** Exponenten. Es gilt
$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}.$$

Die Potenzgesetze in diesem Abschnitt gelten genauso für rationale Exponenten. Potenzen mit beliebigen Exponenten sind eine Verallgemeinerung der Quadratwurzel.

Beispiel

Vereinfachen Sie $\frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{3}{4}}}$.

$$\frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$$ ◀

Logarithmen sind eine weitere Umkehrung des Potenzierens

Wurzeln können als eine Umkehrung des Potenzierens verstanden werden: In der Gleichung $x^n = a$ fragen wir bei gegebenem Exponenten n und gegebenem a nach der Basis x und bezeichnen das Ergebnis mit $x = \sqrt[n]{a}$.

Wir können das Potenzieren aber auch noch auf eine andere Art umkehren: In $a^x = b$ suchen wir bei gegebener Basis a und gegebenem b den Exponenten x. Das führt auf die Definition des Logarithmus.

Definition

Für die positive reelle Zahl $a \neq 1$ besitzt die Gleichung $a^x = b$ für $b > 0$ stets eine reelle Lösung. Diese nennen wir **Logarithmus** von b zur Basis a und schreiben dafür

$$x = \log_a(b).$$

$x = \log_a(b)$ ist also derjenige Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Direkt aus der Definition folgt für die Verknüpfung von Logarithmus und Potenz, dass für jede Basis a gilt

$$\log_a(a^x) = x$$

und

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Achtung Unterscheiden Sie die Gleichungen $x^a = b$ und $a^x = b$.

- Bei $x^a = b$ steht die Unbekannte x in der Basis, die Lösung x ist $x = \sqrt[a]{b}$.
- Bei $a^x = b$ steht die Unbekannte x im Exponenten, die Lösung x ist $x = \log_a(b)$. ◀

Beispiel

Mit der Definition des Logarithmus erhalten wir:

1. $\log_{10}(1000) = 3$, denn $10^3 = 1000$
2. $\log_3(81) = 4$, denn $3^4 = 81$
3. $\log_a(a^x) = x$, denn $a^x = a^x$
4. $\log_a(a) = 1$, denn $a^1 = a$
5. $\log_a(1) = 0$, denn $a^0 = 1$ ◀

Rechenregeln für den Logarithmus zu einer festen Basis *a*

Für den Logarithmus zu einer festen Basis a und $u, v > 0$ gelten folgende Rechenregeln:

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$, speziell
4. $\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = -\log_a(u)$

Diese Regeln lassen sich aus den Potenzregeln herleiten, z. B.

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \quad | \log_a(\ldots), \\ \log_a(a^x \cdot a^y) &= \log_a(a^{x+y}), \\ \log_a(a^x \cdot a^y) &= x + y. \end{aligned}$$

Mit $a^x =: u$, $a^y =: v$ folgt $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$ und

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v).$$

Beispiel

Mit den Rechenregeln für den Logarithmus erhalten wir:

1. $\frac{4}{5} \cdot \log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u^{\frac{4}{5}}) + \log_a(v) = \log_a\left(u^{\frac{4}{5}} \cdot v\right)$
2. $\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3(81) - \log_3(27) = \log_3(3^4) - \log_3(3^3) = 4 - 3 = 1$
3. $\log_5(125^4) = 4 \cdot \log_5(125) = 4 \cdot \log_5(5^3) = 12 \cdot \log_5(5) = 12$ ◀

Wichtige Basen für Logarithmen sind:

- **Basis 10:** $\lg(x) := \log_{10}(x)$: Dekadischer Logarithmus
- **Basis e:** $\ln(x) := \log_e(x)$: Natürlicher Logarithmus
- **Basis 2:** $\operatorname{ld}(x) := \log_2(x)$: Dualer Logarithmus

e ist dabei die eulersche Zahl $e = 2.71828182845904\ldots$

Insbesondere ist $\ln(e^x) = x$ und $e^{\ln(x)} = x$.

Logarithmen können bezüglich verschiedener Basen umgerechnet werden. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Basiswechsel**. Ein Taschenrechner stellt im Allgemeinen den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ und den dekadischen Logarithmus $\lg(x)$ zur Verfügung. Die Zahl $x = \log_a(b)$ zu einer beliebigen Basis

$a > 0$ kann damit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} a^x &= b \quad | \ln(\dots) \\ x \cdot \ln(a) &= \ln(b) \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{\ln(b)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

Also folgt die Umrechnungsformel

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

Beispiel

1. $\lg(27) = \frac{\ln(27)}{\ln(10)} = \frac{3.2958...}{2.3025...} = 1.43136\dots$
   Probe: $10^{1.4136...} = 27$
2. $\log_{27}(123) = \frac{\ln(123)}{\ln(27)} = 1.46007\dots$
   Probe: $27^{1.46007...} = 123$
3. $\log_{17}(18) = \frac{\lg(18)}{\lg(17)} = 1.020\dots$
   Probe: $17^{1.020...} = 18$ ◄

1.6 Indexschreibweise und Summenzeichen

In der Fachliteratur findet häufig das Summenzeichen Verwendung, mit dem sich längliche oder komplizierte Summen platzsparend aufschreiben lassen. Bevor wir uns näher mit dieser Notation befassen, überlegen wir uns, wie wir Variable nummerieren können.

Bevor die Buchstaben ausgehen: Indizes nummerieren Variable

Häufig muss man Variable oder andere Symbole näher bezeichnen oder durchnummerieren. Dazu kann man **Indizes** (Einzahl: Index) verwenden, die für gewöhnlich rechts unten neben das Symbol oder die Variable geschrieben werden. Beispiele dafür sind:

- $K_0, K_1, K_2, \dots$ für das Kapital einer Geldanlage nach $0, 1, 2, \dots$ Jahren
- $a_1, a_2, a_3, \dots$ für die Elemente einer sog. Zahlenfolge
- F_x, F_y, F_z für die Komponenten einer Kraft entlang der Koordinatenachsen
- $x_{1,2}$ für die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung

Index

Ein **Index** dient dazu, mehrere ähnliche Variablen zu unterscheiden oder zu ordnen bzw. zu nummerieren. Der Index einer Variablen spielt also die Rolle einer „Hausnummer", mit der eine Variable identifiziert werden kann.

Das Summenzeichen ist eine elegante Schreibweise für Summen

Definition

Das **Summenzeichen** $\sum$ (griech.: Sigma) ist erklärt durch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Hier sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen, die von einem Index, Zähler oder auch Laufindex k abhängig sind. Der Laufindex nimmt dabei die Werte von $k = 1$ bis $k = n$ in Einserschritten nacheinander an. Nicht immer startet eine Summe dabei mit dem Laufindex 1. Etwas allgemeiner können wir auch mit einem beliebigen Startindex beginnen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Wir können diese Summe auch formal etwas anders schreiben:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k =: \sum_{k \in M} a_k, \quad M := \{k \,|\, m \le k \le n\}.$$

Die letzte Darstellung macht uns klar, was passiert, wenn der Startindex über dem Endindex liegt, d. h., falls $m > n$ gilt. In diesem Fall ist die Indexmenge M leer – es wird also nichts summiert, und die Summe trägt dann den Wert 0. Wir reden in dieser Situation von einer **leeren Summe**.

Mit der Definition des Summenzeichens erhalten wir:

1. Bei $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$ läuft der Zähler k von 1 bis 5. Die Zahlen $a_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, \dots, 5$ werden alle nacheinander addiert:
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$
2. Bei $\sum\limits_{k=2}^{5} \frac{(-1)^k}{k}$ läuft der Zähler k von 2 bis 5, und mit $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ erhalten wir
$$\sum_{k=2}^{5} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$$
   Der Term $(-1)^k$ nimmt für $k = 1, 2, 3, \dots$ abwechselnd die Werte -1 und 1 an.
3. Der Laufindex kann beispielsweise auch i heißen:
$$\sum_{i=3}^{5} \frac{i^2}{i+1} = \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6}.$$

4. Der Laufindex im Summenzeichen und der Index der Summanden müssen zueinander passen. Der Ausdruck $\sum_{k=1}^{3} a_k$ bedeutet
$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3,$$
wohingegen der Ausdruck $\sum_{k=1}^{3} a_i$ eine andere Summe darstellt, nämlich
$$\sum_{k=1}^{3} a_i = a_i + a_i + a_i = 3a_i,$$
denn die reelle Zahl a_i hängt nicht vom Laufindex k ab.
5. Insbesondere gilt
$$\sum_{j=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1)\text{-mal}} = n + 1.$$
6. Folgende Ausdrücke beschreiben dieselbe Summe:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} = \sum_{l=5}^{n+5} a_{l-5}.$$
Dies ist am einfachsten zu erkennen, indem wir die Summen explizit ausschreiben, also das Summenzeichen auflösen. Eine **Indexverschiebung** innerhalb einer Summe,
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m\pm p}^{n\pm p} a_{k\mp p},$$
für beliebiges $p \in \mathbb{Z}$ kann manchmal sehr nützlich sein, um Summen zu vereinfachen oder an eine Standardform anzupassen.

Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen

1. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0, \quad$ falls $m > n$ (leere Summe)

Manche Summen kann man geschlossen darstellen.

Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen

Wir zeigen für $n \in \mathbb{N}$ die Identität
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Wir schreiben die Summe auf einmal in direkter Reihenfolge und in umgekehrter Reihenfolge auf und addieren summandenweise:
$$\begin{aligned} S &:= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ \underline{S} &\underline{:= n + (n-1) + \cdots + 1} \\ 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow 2S = n \cdot (n+1) \Rightarrow \quad S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$
Unter Verwendung des Summenzeiches erhalten wir alternativ:
$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k + n + 1 - k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) \\ &= (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1) \cdot n. \end{aligned}$$
Es folgt $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. ◀

Diese Idee soll der Legende nach *Carl Friedrich Gauß* (1777–1855) bereits im Alter von sechs Jahren gehabt haben, als der Lehrer die Schüler damit beschäftigen wollte, alle ganzen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Nach kurzer Zeit präsentierte der kleine Gauß das korrekte Ergebnis
$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Geometrische Summenformel

Wir zeigen die geometrische Summenformel für $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$:
$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1.$$
Zum Nachweis betrachten wir
$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k,$$
$$q \cdot S = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}.$$
Subtraktion beider Gleichungen ergibt
$$(1-q)S = 1 - q^{n+1},$$
und für $q \neq 1$ folgt $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. ◀

Jetzt stellen wir uns Zahlen vor, die durch zwei Indizes i und j nummeriert werden. Dies können z. B. Kosten sein, die die Maschine Nr. i am Tag Nr. j erzeugt. Es seien also a_{ij} gewisse Zahlen, $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Dann setzen wir:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} := \left\{ \begin{array}{cccccccc} & a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1m} \\ + & a_{21} & + & & \cdots & & + & a_{2m} & + \\ & \vdots & & & & & & \vdots \\ + & a_{n1} & + & & \cdots & & + & a_{nm} \end{array} \right.$$

Beispiel

Haben wir Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_m$ gegeben, so ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j\,.$$

Ausgeschrieben sieht dies viel komplizierter aus:

$$\begin{aligned} &(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) \\ &= (a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_m) + (a_2 b_1 + \cdots + a_2 b_m) + \cdots \\ &\quad + (a_n b_1 + \cdots + a_n b_m). \end{aligned}$$ ◀

1.7 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ führen wir die Fakultät ein.

Definition

Die **Fakultät** einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist erklärt durch

$$n! := 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n,$$

gelesen „n Fakultät". Wir multiplizieren also einfach alle natürlichen Zahlen von 1 bis n miteinander.

Es gilt

$$\begin{aligned} 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \\ 5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

$n!$ wächst sehr schnell mit $n \in \mathbb{N}$.

Fakultät und Binomialkoeffizient sind wichtig in der Kombinatorik

Fakultäten werden benötigt in der **Kombinatorik**, der Lehre von der Abzählung endlicher Mengen. Neben der Fakultät benötigt man den Binomialkoeffizienten.

Definition

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann heißt die natürliche Zahl

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

der **Binomialkoeffizient** von n und k, gelesen „n über k".

Für $n < k$ setzt man

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Mit der Definition der Binomialkoeffizienten berechnet man

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

und

$$\binom{11}{8} = \frac{11!}{(11-8)! \cdot 8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Eigenschaften von Binomialkoeffizienten

Es sei $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Einsetzen in die Definition liefert nämlich sofort

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = 1$$

und

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = 1$$

sowie

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$$

und

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n.$$

Die Kombinatorik befasst sich mit dem systematischen Abzählen endlicher Mengen

Mit Hilfe der Kombinatorik kann man endliche Mengen systematisch abzählen. Wir betrachten n unterscheidbare Elemente (Objekte, Personen, Gegenstände), dargestellt durch n Kugeln in einer Urne.

Eine **Permutation** von n Elementen ist eine Anordnung der n Elemente in einer bestimmten Reihenfolge.

Permutation von n Elementen

Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen von n Elementen.

Um uns das klar zu machen, betrachten wir das Ziehen von n unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen. Für die Besetzung des ersten Platzes gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten Platz gibt es $n-1$ Möglichkeiten, usw., und für den n-ten Platz bleibt noch eine Kugel übrig. Also gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

Wählt man aus einer Menge von n Elementen k Elemente aus, ohne auf die Reihenfolge zu achten, so spricht man von einer **Kombination von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung**.

Achtet man dagegen auf die Reihenfolge (Anordnung), so spricht man von einer **Variation von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung**.

Kombinationen und Variationen ohne Wiederholung

- Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung ist $\binom{n}{k}$.
- Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung ist $n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$.

Auch dies machen wir uns wieder mithilfe eines Urnenexperiments klar. Wir ziehen k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln ohne Zurücklegen (Abb. 1.4). Wieder

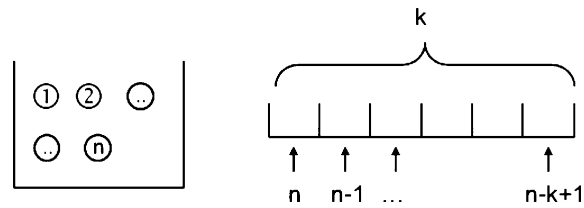


Abb. 1.4 Bei der Bestimmung der Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k *ohne* Wiederholung zieht man aus einer Urne k Kugeln *ohne Zurücklegen* unter Beachtung der Reihenfolge

gibt es für die Besetzung des ersten Platzes n Möglichkeiten, für den zweiten Platz gibt es $n-1$ Möglichkeiten, usw., und für den k-ten Platz bleiben noch $(n-k+1)$ Kugeln übrig. Also gibt es für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ Möglichkeiten, wobei die Reihenfolge berücksichtigt ist.

Wieviele Möglichkeiten gibt es k unterscheidbare Kugeln anzuordnen? Mit dem vorherigen Ergebnis gibt es $k!$ Permutationen einer k-elementigen Menge. Also fallen $k!$ Variationen auf eine Kombination zusammen.

Insgesamt erhält man

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten. Somit hat man die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung erhalten.

Lässt man bei der Auswahl der k Elemente aus einer Menge von n Elementen Wiederholungen zu, ohne auf die Reihenfolge zu achten, so spricht man von einer **Kombination von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung**.

Achtet man dagegen auf die Reihenfolge (Anordnung), so spricht man von einer **Variation von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung**.

Kombinationen und Variationen mit Wiederholung

- Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist $\binom{n+k-1}{k}$.
- Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist n^k.

Wir beginnen mit den Variationen. Ziehen von k Kugeln mit Zurücklegen aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (Abb. 1.5) ergibt

$$n \cdot n \cdots n = n^k$$

Möglichkeiten.

Da bei der Berechnung der Kombinationen jedes der n Elemente mehrfach vorkommen kann und die Reihenfolge nicht beachtet wird, modifizieren wir das Urnenmodell wie folgt: Wir verteilen

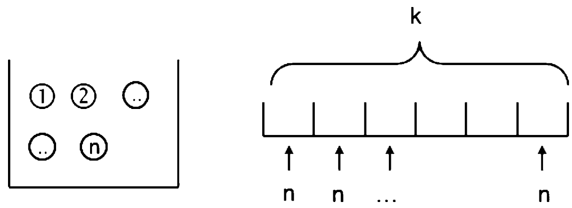


Abb. 1.5 Bei der Bestimmung der Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k *mit* Wiederholung zieht man aus einer Urne k Kugeln *mit Zurücklegen* unter Beachtung der Reihenfolge

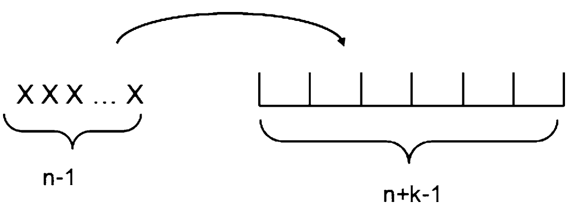


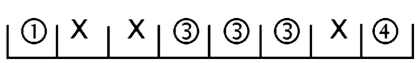
Abb. 1.6 Bei der Verteilung von $n-1$ Trennzeichen X auf $n+k-1$ Plätze bleiben immer k Plätze frei

$n-1$ „Trennzeichen" X auf $n+k-1$ Plätze (Abb. 1.6). Dabei bleiben immer k Plätze frei.

Die Verteilung der Trennzeichen X wird wie folgt interpretiert:

- Die Anzahl der freien Plätze vor dem ersten X entspricht der Anzahl der Kugeln mit Nummer 1.
- Die Anzahl der freien Plätze zwischen dem $(j-1)$-ten und j-ten X entspricht der Anzahl der Kugeln mit Nummer j.
- Die Anzahl der freien Plätze hinter dem letzten, dem $(n-1)$-ten X entspricht der Anzahl der Kugeln mit Nummer n.

Beispielsweise sind für $n = 4$ und $k = 5$ in der Stichprobe



eine Kugel mit Nummer 1, keine Kugel mit Nummer 2, drei Kugeln mit Nummer 3 und eine Kugel mit Nummer 4 enthalten. Insgesamt wurden $k = 5$ Kugeln gezogen.

Für die Verteilung der $n-1$ (nicht unterscheidbaren) Trennzeichen X auf die $n+k-1$ Plätze gibt es

$$\frac{(n+k-1)\cdots(k+1)}{(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten.

Tab. 1.2 stellt die Ergebnisse übersichtlich zusammen.

Beispiel

1. Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts INA bilden?
   Die Anzahl der Permutationen aus 3 Elementen ist $3! = 6$. Die sechs Wörter lauten: INA, IAN, NIA, NAI, AIN, ANI.
2. Wie viele 8-stellige Dualzahlen gibt es?
   Aus der Menge $\{0, 1\}$ werden 8 Elemente mit Wiederholung und mit Reihenfolge ausgewählt. Die Anzahl der Variationen von 2 Elementen zur Klasse 8 mit Wiederholung ist 2^8.
3. Beim Zahlenlotto „6 aus 49" sind 6 Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 49\}$ auszuwählen, so dass die Spielmöglichkeiten durch die Kombination aus 49 Elementen zur Klasse 6 ohne Wiederholung gegeben sind. Aus der Tabelle entnehmen wir für die Anzahl den Wert
   $$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816.$$
4. Aus einer Gruppe von 8 Studenten soll ein Team bestehend aus Projektleiter, Sekretär und Berichterstatter gebildet werden. Wie viele Teamkonstellationen sind möglich?
   Aus der Menge der Studenten ($n = 8$) werden $k = 3$ Leute auf Platz 1, 2 und 3 gezogen. Die Anzahl der Variationen von 8 Elementen zur Klasse 3 ohne Wiederholung beträgt $\binom{8}{3}3! = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
5. Wieviele unterschiedliche Würfe sind mit k gleichen Würfeln (mit Augenzahlen 1 bis 6) möglich?
   Aus der Menge der Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ($n = 6$) werden k Augenzahlen mit Wiederholung und ohne Reihenfolge ausgewählt. Die Anzahl der Kombinationen von 6 Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist $\binom{6+k-1}{k}$. ◀

Tab. 1.2 Übersicht über die Formeln der Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutation (mit Reihenfolge)	$n!$	n^n
Variation (mit Reihenfolge)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Kombination (ohne Reihenfolge)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Der binomische Lehrsatz ist eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln

Aus den Rechenregeln für die Addition und Multiplikation reeller Zahlen folgen die drei binomischen Formeln.

Binomische Formeln

- 1. binomische Formel:
  $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- 2. binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- 3. binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Für die dritte Potenz erhalten wir

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &= \binom{3}{0}\cdot a^3+\binom{3}{1}\cdot a^2b+\binom{3}{2}\cdot ab^2+\binom{3}{3}\cdot b^3.\end{aligned}$$

Allgemein gilt der binomische Lehrsatz.

Binomischer Lehrsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}.$$

Wegen $(a+b)^n = (b+a)^n$ gilt auch

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k.$$

Mithilfe des **pascalschen Dreiecks** kann man sich die Koeffizienten der Terme $a^k\cdot b^{n-k}$ aus dem binomischen Lehrsatz leicht merken:

$$\begin{array}{l|ccccccccc} n=0 & & & & & 1 & & & & \\ n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\ n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Bildungsgesetz für das pascalsche Dreieck

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Mit der Definition der Binomialkoeffizienten gilt nämlich

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}+\frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!}\\ &= \frac{n!\cdot(k+1)+n!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\\ &= \frac{n!\cdot(n-k+k+1)}{((n+1)-(k+1))!\cdot(k+1)!}\\ &= \frac{n!\cdot(n+1)}{((n+1)-(k+1))!\cdot(k+1)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Beispiel

1. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}(x-y)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot x^k\cdot(-y)^{4-k}\\ &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot(-y)^k\cdot x^{4-k}\\ &= x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$$

denn

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Dieses Ergebnis kann man folgendermaßen interpretieren:
$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ist die Gesamtanzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
Unser Ergebnis besagt also, dass eine Menge mit n Elementen 2^n Teilmengen besitzt.
Beispielsweise besitzt die Menge $M = \{A, B\}$ die 2^2 Teilmengen: $\emptyset$, $\{A\}$, $\{B\}$ und $\{A, B\}$. ◀

1.8 Lösen von Gleichungen

Gleichungen treten überall in den Anwendungen auf. Enthält eine Gleichung Variable, so kann man versuchen, sie zu lösen. Das heißt, wir wollen diejenigen Zahlenwerte der Variablen finden, für die man eine wahre Aussage erhält. Man spricht auch davon, die Gleichung nach der unbekannten Variablen aufzulösen. Die Lösungen einer gegebenen Gleichung zu bestimmen, gelingt im Allgemeinen nur für einige besondere Bauarten von Gleichungen. Wir besprechen im Folgenden einige dieser Spezialfälle.

Wir betrachten **algebraische Gleichungen** der Bauart

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = b,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ vorgegeben sind und $x \in \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste vorkommende Potenz $n \in \mathbb{N}$ ist der **Grad** der Gleichung. Anders ausgedrückt: Wir suchen die Nullstellen des **Polynoms** $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ vom Grad n. Polynome werden wir in Abschn. 2.2 noch detaillierter behandeln.

Beispiel

1. $2x + 2 = 5$ ist eine Gleichung ersten Grades, eine **lineare Gleichung**.
2. $x^2 = 25$ ist eine Gleichung zweiten Grades, eine **quadratische Gleichung**.
3. $x^3 + x^2 - x = 1$ ist eine Gleichung dritten Grades.
4. $I = I_0(1 + \alpha\Delta\theta)$ ist eine lineare Gleichung, wenn $\Delta\theta$ gesucht ist.
5. $s = s_0 + v_0 + \frac{1}{2}gt^2$ ist eine quadratische Gleichung, wenn t gesucht ist. Ist v_0 gesucht, handelt es sich um eine lineare Gleichung.
6. $\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r A} + \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 A}$ ist eine lineare Gleichung, wenn d gesucht ist. ◀

Äquivalenzumformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht

Man versucht, die Gleichung mithilfe von **Äquivalenzumformungen** so umzuschreiben, dass man die Lösung ablesen kann. Man sagt, die Gleichung wird nach der Unbekannten aufgelöst.

Als Zeichen für Äquivalenzumformungen kann $\Longleftrightarrow$ zwischen den Gleichungen geschrieben werden.

Etwas formaler spricht man von der „Bestimmung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung".

Beispiel

Zur Lösung der Gleichung

$$2x + 2 = 5$$

formen wir um:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 5 \quad \mid -2 \\ 2x &= 3 \quad \mid :2 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Umformungen, die auf beide Seiten einer Gleichung angewendet werden, notiert man nach einem senkrechten Strich | hinter der Gleichung. ◀

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind Umformungen auf beiden Seiten der Gleichung, die die Lösungsmenge nicht ändern:

- Addition (bzw. Subtraktion) eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad x + c = y + c.$$

- Multiplikation (bzw. Division) beider Seiten der Gleichung mit (bzw. durch) einen Term ungleich 0:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot c = y \cdot c, \quad c \neq 0.$$

Achtung Die Null beim Multiplizieren einer Gleichung mit einem Term kann durchaus „versteckt" auftreten. Die Multiplikation mit $x + 1$ ist keine Äquivalenzumformung, denn für $x = -1$ hätten wir mit 0 multipliziert. In diesem Fall müssen wir $x = -1$ explizit ausschließen. Hier ist dann eine Fallunterscheidung notwendig. ◀

Auch das Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Man sieht dies am Beispiel der Gleichung $x = 1$ mit $\mathbb{L} = \{1\}$. Quadrieren liefert hier $x^2 = 1^2 = 1$. Diese Gleichung besitzt aber zwei Lösungen: $x = 1$ und $x = -1$, d. h., $\mathbb{L} = \{-1, 1\}$. Wir haben durch Quadrieren die Lösungsmenge vergrößert. Wir machen eine Probe, um festzustellen, welche Elemente Lösung der Ausgangsgleichung sind – es bleibt in diesem Beispiel nur $x = 1$. Hier gilt $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, aber $x^2 = 1 \not\Rightarrow x = 1$.

Achtung Werden Umformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind, für das Lösen einer Gleichung verwendet, sodass wir eine Gleichung nur als notwendige Bedingung erhalten, ist anschließend eine Probe unerlässlich. ◀

Die einfachste algebraische Gleichung ist die **lineare Gleichung**. Sie hat die Form

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Die Lösung ist hier $x = -\frac{b}{a}$, also $\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Beispiel

1. Zu lösen ist die Gleichung $3x - 18 = -x + 6$. Ausführlich notiert sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} && 3x - 18 &= -x + 6 && \mid +x \\ &\Leftrightarrow & 4x - 18 &= 6 && \mid +18 \\ &\Leftrightarrow & 4x &= 24 && \mid :4 \\ &\Leftrightarrow & x &= 6 \end{aligned}$$

   Die Gleichung hat also die Lösung $x = 6$, $\mathbb{L} = \{6\}$.
2. Die Gleichung $0 \cdot x + 3 = 4$ besitzt keine Lösung; man schreibt $\mathbb{L} = \emptyset$. Das Symbol $\emptyset$ bezeichnet die „leere Menge“. ◀

Lineare Gleichungen können kompliziert aussehen, wenn die gesuchte Größe zusammen mit vielen Vorfaktoren in der Gleichung vorkommt.

Beispiel

Lösen Sie nach d auf:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} + \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 A}.$$

Wir rechnen schrittweise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} + \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 A} && \mid \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r A \\ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{C} &= d_1 + \varepsilon_r (d - d_1) \\ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{C} &= d_1 + \varepsilon_r d - \varepsilon_r d_1 \\ -\varepsilon_r d &= d_1 - \varepsilon_r d_1 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{C} && \text{Terme sortieren} \\ d &= -d_1 \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_0 A}{C} && \text{durch } (-\varepsilon_r) \text{ dividieren} \\ d &= d_1 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_0 A}{C} && \text{es ist } 1 - \varepsilon_r = -(\varepsilon_r - 1) \end{aligned}$$

◀

Bei quadratischen Gleichungen hilft eine Lösungsformel

Die **quadratische Gleichung** hat die Bauart

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung lösen.

Dividiert man durch den Faktor a vor dem quadratischen Term, so erhält man die **Normalform** der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Im einfachsten Fall mit $p = 0$ ist

$$x^2 + q = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = -q.$$

Diese Gleichung haben wir bei der Einführung der Quadratwurzel in Abschn. 1.5 bereits gelöst.

1. Falls $q < 0$ ist, so existieren zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$. Beachte: $-q > 0$. Also ist $\mathbb{L} = \{\sqrt{-q}, -\sqrt{-q}\}$.
2. Falls $q = 0$ ist, so haben wir die Lösung $x = 0$, d. h., $\mathbb{L} = \{0\}$.
3. Im Fall $q > 0$ existiert keine reelle Lösung. Quadrate reeller Zahlen sind stets nichtnegativ. Also kann es kein $x \in \mathbb{R}$ geben, dessen Quadrat negativ ist. Wir kommen auf die Lösung dieser Gleichung in Kap. 3 zurück.

Achtung Quadratische Gleichungen können zwei verschiedene, genau eine oder keine (reelle) Lösung haben. ◀

Nun betrachten wir die allgemeine quadratische Gleichung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0.$$

Durch **quadratische Ergänzung** erzeugen wir auf der linken Seite einen Ausdruck, der mit der ersten binomischen Formel als Quadrat geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q. \end{aligned}$$

Je nachdem, ob der Ausdruck $(\frac{p}{2})^2 - q$ positiv, gleich 0 oder negativ ist, erhält man wieder zwei, eine oder keine Lösung. Für $(\frac{p}{2})^2 - q \geq 0$ kann man nach x auflösen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

***p*-*q*-Formel und Mitternachtsformel**

Die quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.1}$$

Die Lösungsformel (1.1) wird ***p*-*q*-Formel** genannt.

Verzichtet man auf das Bilden der Normalform, so besitzt die nichtnormierte quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad a \neq 0$$

die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.2}$$

Die Formel (1.2) wird als **Mitternachtsformel** bezeichnet. In beiden Fällen gilt: Ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, hat die Gleichung zwei verschiedene Lösungen. Ist der Ausdruck unter der Wurzel gleich 0, so besitzt die Gleichung genau eine Lösung. Wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, hat die Gleichung keine reelle Lösung; sie ist in $\mathbb{R}$ unlösbar.

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt **Diskriminante**.

Beispiel

1. Die Gleichung

$$-2x^2 - 4x + 6 = 0$$

wird durch -2 dividiert und geht über in die quadratische Gleichung in Normalform:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Diese hat die Lösungen

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -3.$$

Also ist $\mathbb{L} = \{1, -3\}$.

2. Die Gleichung

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

hat die Lösung

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} \quad \Rightarrow \quad x = -3.$$

Hier ist $\mathbb{L} = \{-3\}$.

3. Für die Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

erhält man aus der Lösungsformel

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13}.$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel kleiner 0 ist, ist die Gleichung nicht reell lösbar; es ist $\mathbb{L} = \emptyset$. ◄

Elektron im elektrischen Feld

Ein Elektron tritt mit der Geschwindigkeit von $v = 1.0 \cdot 10^7 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in das homogene Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke $E = 200 \, \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ (Abb. 1.7). Beim Eintritt in das Feld wirkt auf das Elektron die Kraft $F = e \cdot E$ in y-Richtung. Aus $F = m \cdot a$ und dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung folgt für die y-Ablenkung

$$y(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \frac{1}{2} \frac{e \cdot E}{m} \cdot t^2$$

mit der Masse des Elektrons $m = 9 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$ und der Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$. Zu welchem Zeitpunkt t_0 nach Eintritt in das Feld ist das Elektron um $y_0 = 2\,\text{mm}$ in y-Richtung abgelenkt?

Die quadratische Gleichung $y_0 = \frac{1}{2} a \cdot t_0^2$ mit $t_0 > 0$ besitzt die Lösung

$$t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{a}}.$$

Mit den Daten des Elektrons folgt

$$a = \frac{e \cdot E}{m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 200 \cdot 10^2\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}{9 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}} = 3.56 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und weiter

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{3.56 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1.06 \cdot 10^{-9}\,\text{s},$$

also 1.06 ns. ◄

In der Praxis sucht man häufig nach Nullstellen von Polynomen. Manchmal liegen Polynome schon faktorisiert vor. Es ist ein häufig zu beobachtender „Anfängerfehler", dass ein Term, der bereits als Produkt vorliegt, erst einmal „reflexartig" ausmultipliziert wird. Das ist aber ungeschickt, denn aufgrund der Nullteilerfreiheit der reellen Zahlen gilt der Satz vom Nullprodukt.

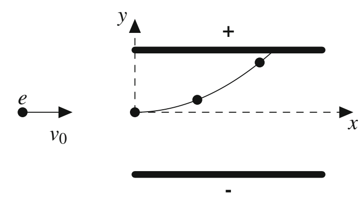


Abb. 1.7 Ein Elektron wird im elektrischen Feld auf eine Parabelbahn abgelenkt

Teil I

Satz vom Nullprodukt

Das Produkt zweier Zahlen oder Ausdrücke ist genau dann 0, wenn einer oder beide Faktoren 0 sind. Dies nennt man **Satz vom Nullprodukt**:

$$x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } y = 0. \tag{1.3}$$

Beispiel

Der Term $(x-2)(x-3) = 0$ ergibt ausmultipliziert die quadratische Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Das Anwenden der Lösungsformel ergibt

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6},$$

also $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Allerdings hätte man die Nullstellen vor dem Ausmultiplizieren bereits ablesen können. Der Satz vom Nullprodukt besagt: $(x-2)(x-3)$ wird 0 für $x - 2 = 0$, also für $x_1 = 2$ oder für $x - 3 = 0$, also für $x_2 = 3$. ◀

Achtung Sind bereits Faktoren ausgeklammert, kann man mithilfe des Satzes vom Nullprodukt die Lösung direkt ablesen. ◀

Die Lösung von algebraischen Gleichungen **höheren Grades** gelingt nur in Spezialfällen. Häufig kann man eine Lösung raten und den Grad der Gleichung durch Polynomdivision (Abschn. 2.2) reduzieren.

Bei Gleichungen dritten Grades kann Polynomdivision helfen

Zunächst einmal halten wir fest, dass eine Gleichung dritten Grades immer mindestens eine reelle Lösung besitzt. Ob wir diese aber auch finden können, ist eine andere Frage.

Auch für solche Gleichungen gibt es eine spezielle Lösungsformel, die auf *Geralomo Cardano* (1501–1576), einen Universalgelehrten des 16. Jahrhunderts, zurückgeht, aber leider nicht so leicht zu handhaben ist wie die Mitternachtsformel und daher in der Praxis selten verwendet wird. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, eine Nullstelle x_0 zu raten und dann den Term $x - x_0$ durch **Polynomdivision** abzuspalten.

Beispiel

Die Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

hat die Lösung $x_0 = -1$:

$$(-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0.$$

Dies haben wir durch Probieren herausgefunden. Der Faktor $(x+1)$ kann von $x^3 - 4x^2 + x + 6$ durch Polynomdivision ohne Rest abdividiert werden:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x+1) = x^2 - 5x + 6.\\
\underline{-(x^3 + x^2)\qquad\qquad}\\
\qquad - 5x^2 + x + 6\\
\quad \underline{-(-5x^2 - 5x)}\\
\qquad\qquad\quad 6x + 6\\
\qquad\qquad \underline{-(6x + 6)}\\
\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}$$

Somit gilt

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1) \cdot (x^2 - 5x + 6).$$

Die quadratische Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wir erhalten die Zerlegung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3).$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist die Ausgangsgleichung erfüllt, wenn mindestens einer der drei Faktoren 0 ist. Also lauten die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3,$$

also ist $\mathbb{L} = \{-1, 2, 3\}$. ◀

Hinweis

Wenn man versucht, die Nullstellen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten zu raten, so lohnt es sich, zunächst die ganzzahligen Teiler des „Konstantgliedes“ a_0 auszuprobieren. Haben wir es z. B. mit dem Polynom $a_n x^n + \ldots + a_1 x + 6$ zu tun, so probieren wir es mit den Zahlen $1, 2, 3, -1, -2, -3$.

Die Begründung ist ganz einfach: Hat das Polynom die Nullstelle $x_0 = a$, so können wir wie oben gezeigt den Faktor $(x-a)$ abspalten; wir können also das Polynom schreiben als $(x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0)$. Wenn wir dies wieder ausmultiplizieren, so erhalten wir als Konstantglied die Zahl $-a \cdot b_0$, d. h., a muss als Teiler im Konstantglied des ursprünglichen Polynoms stecken.

Besonders einfach ist der Spezialfall $a_0 = 0$, d. h., $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0$. Hier kann man x ausklammern (d. h., 0 ist eine Lösung) und muss dann nur noch eine quadratische Gleichung lösen.

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0.$$

Ausklammern liefert

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Für den quadratischen Term in der Klammer liefert die Lösungsformel die beiden Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Insgesamt ist also $\mathbb{L} = \{0, 2, 3\}$. ◀

Bei Gleichungen vierten Grades hilft manchmal Substitution

Auch für Gleichungen 4. Grades gibt es eine Lösungsformel. Diese stammt von *Lodovico Ferrari* (1522–1565). Sie ist aber noch unhandlicher als die Formel von Cardano und hat noch weniger praktische Bedeutung. Deshalb versucht man auch in diesem Fall, Nullstellen zu raten und abzuspalten. Einen Sonderfall stellen die **biquadratischen Gleichungen** dar. Sie haben die Form

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0.$$

Hier treten nur gerade Potenzen von x auf, nämlich x^2 und x^4. Deshalb liefert die Substitution $z = x^2$ eine quadratische Gleichung in z:

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0,$$

die dann wieder mit der Mitternachtsformel gelöst werden kann.

Beispiel

Die Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

wird durch Substitution $z = x^2$ überführt in

$$z^2 - 10z + 9 = 0,$$

also in eine quadratische Gleichung in z. Die Mitternachtsformel liefert

$$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 9, \quad z_2 = 1.$$

Für die ursprüngliche Gleichung ergibt sich

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \quad \text{und} \quad x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1.$$

Wir erhalten $\mathbb{L} = \{3, -3, 1, -1\}$. ◀

Es lässt sich zeigen, dass es für Gleichungen noch höheren Grades keine allgemeingültigen Lösungsformeln geben kann, auch nicht in den Fällen, in denen reelle Lösungen existieren. Oftmals muss man zur Lösung von Gleichungen auf **numerische Lösungsverfahren** (z. B. das Newton-Verfahren) zurückgreifen. Mit numerischen Verfahren werden Methoden zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen bzw. Gleichungslösungen bezeichnet.

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die unbekannte Größe mindestens einmal unter einer Wurzel vorkommt.

Beispiel

1. $\sqrt{x+2} = x$ ist eine Wurzelgleichung für x.
2. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ ist eine Wurzelgleichung, wenn h gesucht ist.
3. In der Elektrotechnik treten bei Filterschaltungen Wurzelgleichungen auf:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C \text{ gesucht},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(\omega L)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad L \text{ gesucht}. \quad ◀$$

Bei Gleichungen, die Wurzelausdrücke mit der Unbekannten enthalten, versucht man, die Wurzel durch äquivalente Umformung auf einer Seite zu isolieren. Danach muss man quadrieren und nach x auflösen. Wir haben bereits festgestellt, dass das Quadrieren *keine* Äquivalenzumformung darstellt, sondern nur eine notwendige Bedingung für x liefert, deren Lösungsmenge die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung umfasst. Wir müssen daher die so erhaltenen Lösungen immer durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung kontrollieren, denn die quadrierte Gleichung kann mehr Lösungen als die Ausgangsgleichung haben.

Achtung Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, daher sollte stets abschließend eine Probe durchgeführt werden. ◀

Beispiel

1. Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$x + 2 = x^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

bzw. $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$. Da quadriert wurde, müssen wir die Lösungen durch Einsetzen verifizieren: Für $x_1 = 2$ folgt $\sqrt{2+2} = 2$, eine wahre Aussage; für $x_2 = -1$ ergibt sich $\sqrt{-1+2} = -1$, eine falsche Aussage. Deshalb ist x_2 keine Lösung der Wurzelgleichung, und wir erhalten $\mathbb{L} = \{2\}$.

2. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{4x-3} + 2 - x = 0.$$

Isolieren der Wurzel liefert

$$\sqrt{4x-3} = x - 2.$$

Quadrieren ergibt

$$4x - 3 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3, \quad \text{also} \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 1.$$

Die Probe liefert für $x_1 = 7$: $\sqrt{28-3} + 2 - 7 = 0$, eine wahre Aussage. Für $x_2 = 1$ ergibt sich mit $\sqrt{4-3} + 2 - 1 = 2 \neq 0$ eine falsche Aussage. Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \{7\}$. ◀

Als weiteres Beispiel betrachten wir

Beispiel

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+4} = x - 2 \\ \Rightarrow \quad & x + 4 = (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 4 = x^2 - 4x + 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 - 5x = x(x-5), \end{aligned}$$

also $x = 0$ oder $x = 5$. Eine der beiden Lösungen ist keine echte Lösung, sondern eine „Scheinlösung“, wovon wir uns durch eine Probe überzeugen:

- $x = 0$: Linke Seite $\sqrt{0+4} = 2$, rechte Seite $0 - 2 = -2$. Also ist die Gleichung hier nicht erfüllt; $x = 0$ ist keine Lösung.
- $x = 5$: Linke Seite $\sqrt{5+4} = 3$, rechte Seite $5 - 2 = 3$. Also ist die Gleichung hier erfüllt; $x = 5$ ist eine Lösung.

Zu beachten ist hierbei, dass die zweite Zeile nicht mit einem Äquivalenzzeichen ($\Leftrightarrow$), sondern nur mit einem Implikationszeichen ($\Rightarrow$) in Richtung der quadrierten Gleichung eingeleitet wird. ◀

Betragsgleichungen kann man mit Fallunterscheidungen lösen

Der wichtigste Schritt beim Lösen einer **Betragsgleichung** besteht darin, die Betragsstriche loszuwerden. Das ist eigentlich ganz einfach:

- Ist der Term zwischen den Betragsstrichen ≥ 0, lassen wir die Betragsstriche einfach weg.
- Ist der Term zwischen den Betragsstrichen < 0, ersetzen wir die Betragsstriche durch Klammern und schreiben ein Minuszeichen davor.

Da nun aber der Term zwischen den Betragsstrichen meist von x abhängt, müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Beispiel

Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$|2x - 1| = -x + 1.$$

Wir überlegen uns, wann der Term zwischen den Betragsstrichen welches Vorzeichen hat:

Fall 1: $2x - 1 \geq 0$ bzw. $x \geq \frac{1}{2}$

Hier können wir die Betragsstriche einfach weglassen. Aus unserer ursprünglichen Gleichung wird dann

$$2x - 1 = -x + 1$$

und daraus

$$3x = 2,$$

also $x = \frac{2}{3}$. Wir müssen noch überprüfen, ob diese Lösung überhaupt zulässig ist, d. h., ob sie mit der Bedingung $x \geq \frac{1}{2}$ vereinbar ist. Das ist der Fall, denn $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

Fall 2: $2x - 1 < 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$

Hier werden die Betragsstriche durch Klammern ersetzt, und es wird ein Minuszeichen davor geschrieben. Aus unserer ursprünglichen Gleichung wird dann

$$-(2x - 1) = -x + 1$$

und daraus

$$-x = 0,$$

also $x = 0$. Auch hier prüfen wir, ob diese Lösung zur Bedingung $x < \frac{1}{2}$ passt. Das ist der Fall, denn $0 < \frac{1}{2}$. Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}, 0\right\}$. ◀

Achtung Es ist durchaus möglich, dass sich nach dem Auflösen der Gleichung ein Wert für x ergibt, der im gerade betrachteten Fall gar nicht zulässig ist. Dann müssen wir diese „Lösung" verwerfen. ◀

Beispiel

Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$|x + 1| = 2x + 5.$$

Wieder überlegen wir uns, wann der Term zwischen den Betragsstrichen welches Vorzeichen hat:

Fall 1: $x + 1 \geq 0$ bzw. $x \geq -1$

Hier können wir die Betragsstriche einfach weglassen. Aus unserer ursprünglichen Gleichung wird dann

$$x + 1 = 2x + 5$$

und daraus

$$-4 = x,$$

also $x = -4$. Allerdings sind ja in diesem Fall nur $x \geq -1$ zulässig, weshalb $x = -4$ keine Lösung ist.

Fall 2: $x + 1 < 0$ bzw. $x < -1$

Hier werden die Betragsstriche durch Klammern ersetzt, und es wird ein Minuszeichen davor geschrieben. Aus unserer ursprünglichen Gleichung wird dann

$$-(x + 1) = 2x + 5$$

und daraus

$$-6 = 3x,$$

also $x = -2$. In diesem Fall muss $x < -1$ gelten, und das ist für $x = -2$ erfüllt.

Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \{-2\}$. ◀

Bei einer Betragsgleichung mit nur einem Betrag kann man auch durch Quadrieren die Lösung berechnen.

Beispiel

Wir betrachten nochmals die beiden Beispiele von oben:

1. Gesucht ist die Lösung von:

$$\begin{aligned} & |2x - 1| = -x + 1 \quad |()^2 \\ \Rightarrow \quad & (2x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ \Rightarrow \quad & 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ \Rightarrow \quad & 3x^2 - 2x = 0 \\ \Rightarrow \quad & x \cdot (3x - 2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, müssen wir auch hier die Probe machen:
   Für $x = 0$ ist $|2x - 1| = 1$ und $-x + 1 = 1$, also stimmen beide Seiten überein.
   Für $x = \frac{2}{3}$ ist $|2x - 1| = |\frac{4}{3} - 1| = \frac{1}{3}$ und $-x + 1 = \frac{1}{3}$, also geht auch hier die Probe auf.

2. Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{aligned} & |x + 1| = 2x + 5 \quad |()^2 \\ \Rightarrow \quad & (x + 1)^2 = 4x^2 + 20x + 25 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 20x + 25 \\ \Rightarrow \quad & 0 = 3x^2 + 18x + 24 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 6x + 8 = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = -2,\ x_2 = -4. \end{aligned}$$

   Hier zeigt sich, dass die Probe unverzichtbar ist. Wir haben nämlich:
   Für $x = -2$ ist $|x + 1| = |1| = 1$ und $2x + 5 = 1$, also stimmen beide Seiten überein.
   Für $x = -4$ ist $|x + 1| = |-3| = 3$ und $2x + 5 = -3$, also ist $x = -4$ keine Lösung – aber das wussten wir ja schon. ◀

Bei Gleichungen mit mehreren Beträgen ist die Fallunterscheidung auf jeden Fall sinnvoll.

Beispiel

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$|4x - 1| + |2x - 4| = 10.$$

Die Ausdrücke zwischen den Betragsstrichen ändern ihr Vorzeichen bei $x_1 = \frac{1}{4}$ und bei $x_2 = 2$. Demnach sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $x \geq 2$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |4x - 1| + |2x - 4| = 10 &\Leftrightarrow 4x - 1 + 2x - 4 = 10 \\ &\Rightarrow 6x = 15 \text{ also } x = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

d. h., $\mathbb{L}_1 = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Fall 2: $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |4x - 1| + |2x - 4| = 10 &\Leftrightarrow 4x - 1 - 2x + 4 = 10 \\ &\Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Fall 3: $x \leq \frac{1}{4}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &|4x - 1| + |2x - 4| = 10 \Leftrightarrow 1 - 4x + 4 - 2x = 10 \\ &\Rightarrow 6x = -5, \end{aligned}$$

also $x = -\frac{5}{6}$, d. h., $\mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{6}\right\}$. ◀

1.9 Lösen von Ungleichungen

Ungleichungen treten bei praktischen Problemstellungen im Alltag häufig auf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel

Der Preis für den bezogenen elektrischen Strom besteht aus einer monatlichen Grundgebühr und einem variablen Verbrauchsteil. Ein Elektrizitätswerk bietet folgende Tarife an:

Tarif 1:

Grundgebühr 10 €, Preis pro kWh: 0.1 €

Tarif 2:

Grundgebühr 15 €, Preis pro kWh: 0.09 €.

Für welche monatlichen Verbrauchsmengen ist Tarif 1 günstiger als Tarif 2?

Es bezeichne x den Verbrauch in kWh pro Monat. Dann erhalten wir die Kostenfunktionen

$$T_1(x) = 10 + 0.1 \cdot x, \quad T_2(x) = 15 + 0.09 \cdot x.$$

Die Frage, für welche x die Beziehung $T_1(x) < T_2(x)$ gilt, führt auf die folgende Ungleichung, die wir nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1 \cdot x < 15 + 0.09 \cdot x \quad &| -10, -0.09x \\ 0.01 \cdot x < 5 \quad &| \cdot 100 \\ x < 500. & \end{aligned}$$

Da der Stromverbrauch nie negativ werden kann, lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 500\}$. ◀

Zum Lösen von Ungleichungen gibt es, abhängig vom Aussehen der Ungleichung, verschiedene Techniken. Auch grafische Verfahren (Mathematischer Hintergrund 1.2) können hier sinnvoll eingesetzt werden.

Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht:

- Addition/Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplikation der Ungleichung mit einem Faktor $c \neq 0$:
  $c > 0$: Ungleichungsrichtung bleibt bestehen.
  $c < 0$: Ungleichungsrichtung dreht sich herum.
- Anwendung von streng monoton wachsenden Funktionen (Abschn. 2.1) auf beide Seiten der Ungleichung erhalten das Ungleichheitszeichen
- Anwendung von streng monoton fallenden Funktionen (Abschn. 2.1) auf beide Seiten der Ungleichung drehen das Ungleichheitszeichen um

Achtung Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl durchmultipliziert bzw. durchdividiert, so muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden! ◀

Für einfache, lineare Ungleichungen sind diese Umformngen schon ausreichend, um die Lösungsmenge zu bestimmen.

Beispiel

Wir wollen die Ungleichung

$$x + 3 \leq 7 - x$$

lösen. Mithilfe von Äquivalenzumformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} & x + 3 \leq 7 - x && \mid +x - 7 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 4 \leq 0 && \mid +4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x \leq 4 && \mid :2 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq 2, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}.$$

Als weiteres Beispiel wollen wir

$$2x - 9 < 5x - 3$$

lösen. Mithilfe von Äquivalenzumformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} & 2x - 9 < 5x - 3 && \mid -5x + 9 \\ \Leftrightarrow\ & -3x < 6 && \mid :(-3) \\ \Leftrightarrow\ & x > -2 \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}.$$ ◀

Wenn der Term, mit dem durchmultipliziert bzw. -dividiert wird, von einer Variablen abhängt, müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Beispiel

$$x \cdot (x - 3) \geq x.$$

Fall 1: $x > 0$

Division durch $x > 0$ liefert

$$x - 3 \geq 1.$$

Diese Ungleichung und dazu äquivalente Ungleichungen sind nur gültig, wenn $x > 0$ ist. Eine einfache weitere Umformung liefert $x \geq 4$, d. h., $\mathbb{L}_1 = [4, \infty)$.

Fall 2: $x < 0$

Division durch $x < 0$ liefert

$$x - 3 \leq 1.$$

Diese Ungleichung und dazu äquivalente Ungleichungen sind nur gültig, wenn $x < 0$ ist. Eine einfache weitere Umformung ergibt nun $x \leq 4$. Nur die x, die gleichzeitig $x < 0$ und $x \leq 4$ erfüllen, gehören zur Lösungsmenge. Deshalb ist $\mathbb{L}_2 = (-\infty, 0)$.

$x = 0$ löst die Ungleichung ebenfalls.

Somit erhalten wir $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \{0\} = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$. ◀

Quadratische Ungleichungen lassen sich oft mithilfe einer Linearfaktorzerlegung lösen

Eine quadratische Ungleichung hat die Form

$$x^2 + a \cdot x + b < 0 \quad \text{bzw.} \ > 0.$$

Eine quadratische Ungleichung kann man lösen, indem eine Linearfaktorzerlegung von von $x^2 + a \cdot x + b$ bestimmt und ausnutzt, dass das Produkt aus zwei Faktoren genau dann positiv ist, wenn beide Faktoren dasselbe Vorzeichen haben, und negativ, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben.

Beispiel

Um die Lösungsmenge von

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

zu bestimmen, suchen wir zunächst die Nullstellen der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

d. h., $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

Also ist $x^2 - 3x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 1)$.

Es gilt $x^2 - 3x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 1) > 0$, wenn beide Faktoren größer oder beide Faktoren kleiner als 0 sind.

Im ersten Fall folgt $x > 4$ und $x > -1$, also $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

Im zweiten Fall folgt $x < 4$ und $x < -1$, also $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.

Insgesamt erhält man

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ oder } x < -1\}.$$ ◀

Andere Möglichkeiten sind das grafische Lösen (Mathematischer Hintergrund 1.2), das Kenntnisse über Parabeln voraussetzt und das Umschreiben in Betragsgleichungen, das wir weiter unten beschreiben.

1.2 Mathematischer Hintergrund: Grafisches Lösen von Ungleichungen

Anstatt eine Ungleichung streng formal mithilfe von Äquivalenzumformungen zu lösen, kann man die linke und rechte Seite einer Ungleichung auch als Funktionen (Kap. 2) interpretieren und deren Funktionsgraphen zeichnen. Aus der grafischen Darstellung kann man, ggf. nach einer Berechnung von Schnittpunkten oder Nullstellen, die Lösung der Ungleichung ermitteln.

Die Ungleichung

$$x + 3 \leq 7 - x$$

aus dem ersten Beispiel können wir auch grafisch lösen.

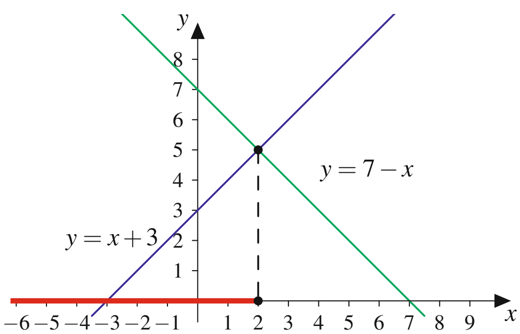


Abb. 1.8 Zur grafischen Lösung der Ungleichung $x + 3 \leq 7 - x$

Wir zeichnen die Geraden $y = x+3$ und $y = 7-x$ (Abb. 1.8). Die Ungleichung $x + 3 \leq 7 - x$ können wir nun interpretieren als die Frage, für welche x der Graph von $x+3$ unterhalb des Graphen von $7-x$ liegt. Antwort aus der Zeichnung: für $x \leq 2$, dort in Rot dargestellt.

Bei quadratischen Ungleichungen ist das grafische Verfahren eine gute Alternative zum formalen Lösen.

Um die Lösungsmenge von

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

zu bestimmen, zeichnen wir die Funktion $y(x) = x^2 + 2x - 3$ auf der linken Seite (Abb. 1.9).

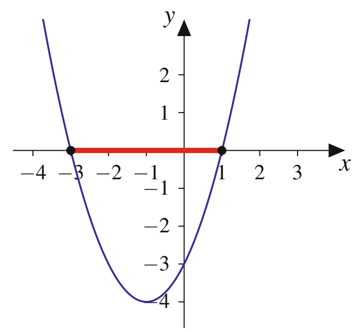


Abb. 1.9 Zur grafischen Lösung der quadratischen Ungleichung $x^2 + 2x - 3 < 0$

Die Ungleichung beschreibt gerade die Punkte der x-Achse, für die der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse liegt. Dies ist die Menge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$.

Um die quadratische Ungleichung

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

zu lösen, zeichnen wir die Funktion $y(x) = x^2 - 3x - 4$ (Abb. 1.10).

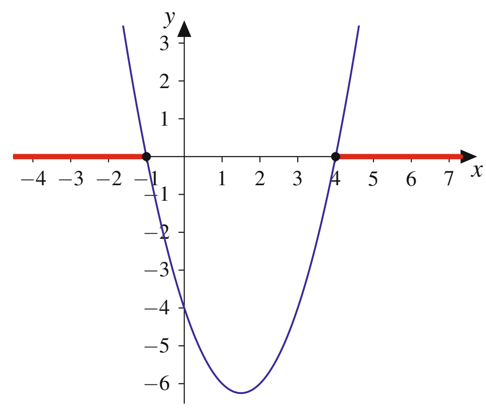


Abb. 1.10 Zur grafischen Lösung der quadratischen Ungleichung $x^2 - 3x - 4 > 0$

Die Ungleichung beschreibt gerade die Punkte der x-Achse, für die der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse liegt, also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ oder } x > 4\}$.

Bei einer quadratischen Ungleichung kann die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ aus

- einem endlichen Intervall,
- der Vereinigung zweier Halbgeraden,
- der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder
- der leeren Menge $\emptyset$

bestehen.

Bei rationalen Ungleichungen sind Fallunterscheidungen erforderlich

Bei rationalen Ungleichungen möchte man gerne mit dem Hauptnenner multiplizieren. Dabei muss man das Vorzeichen des Hauptnenners beachten. Da dies von der Variablen abhängen kann, arbeitet man mit Fallunterscheidungen.

Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Der Hauptnenner ist $x - 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $x - 1 > 0$, d. h., $x > 1$

$$\begin{aligned} x+1 \leq 2 \cdot (x-1) \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq x-3 \\ &\Rightarrow \quad x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \{x \mid x \geq 3\}. \end{aligned}$$

Fall 2: $x - 1 < 0$, d. h., $x < 1$

$$\begin{aligned} x+1 \geq 2 \cdot (x-1) \quad &\Rightarrow \quad 0 \geq x-3 \\ &\Rightarrow \quad x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \{x \mid x < 1\}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ oder } x \geq 3\}$.

Ungleichungen mit Beträgen schreibt man zuerst betragsfrei

Bei Ungleichungen mit Beträgen sind zur Auflösung der Beträge Fallunterscheidungen durchzuführen:

1. Wir suchen die Lösung von $|x-3| < 5$. Der Term $x - 3$ hat eine Nullstelle bei $x = 3$ und ändert dort auch sein Vorzeichen. Wir unterscheiden also zwei Fälle:
   Fall 1: $x - 3 \geq 0$, also $x \geq 3$
   In diesem Fall ist der Term im Betrag positiv, und wir können die Betragsstriche weglassen:
   $$x - 3 < 5, \quad \text{also} \quad x < 8.$$
   Da in diesem Fall $x \geq 3$ sein muss, erhalten wir als Lösungsmenge das Intervall $[3, 8)$.
   Fall 2: $x - 3 < 0$, also $x < 3$
   Hier ist nun der Term im Betrag negativ, und wir müssen ein Minuszeichen davorschreiben:
   $$-(x-3) < 5, \quad \text{also} \quad -x < 2 \quad \text{und damit} \quad x > -2.$$
   Somit haben wir hier als Lösungsmenge das Intervall $(-2, 3)$.
   Die Lösungsmenge ergibt sich nun durch Vereinigung der beiden Teillösungsmengen zu $(-2, 8)$.
2. Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung
   $$|x-1| > 3.$$
   Fall 1: $x - 1 > 0$, d. h., $x > 1$
   Hier gilt
   $$x - 1 > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 4.$$
   Fall 2: $x - 1 < 0$, d. h., $x < 1$
   Hier gilt
   $$-x + 1 > 3 \quad \Rightarrow \quad -2 > x.$$
   Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ oder } x > 4\}$.
3. Wir suchen die Lösungsmenge der Ungleichung
   $$|3x-1| - |x| \leq 2.$$
   Falls der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen gleich 0 wird, treffen wir auf eine Fallgrenze. Somit sind drei Fälle zu unterscheiden:
   Fall 1: $x < 0$
   Hier gilt
   $$|3x-1| - |x| = -(3x-1) - (-x) = -2x + 1.$$
   Die Ungleichung lautet
   $$-2x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$
   Wir erhalten $\mathbb{L}_1 = [-\frac{1}{2}, 0)$.
   Fall 2: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$
   Hier ist
   $$|3x-1| - |x| = -(3x-1) - x = -4x + 1.$$
   Die Ungleichung lautet
   $$-4x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}.$$
   Wir erhalten $\mathbb{L}_2 = [0, \frac{1}{3}]$.
   Fall 3: $x > \frac{1}{3}$
   Hier gilt
   $$|3x-1| - |x| = 3x - 1 - x = 2x - 1.$$
   Die Ungleichung lautet
   $$2x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$
   Wir erhalten $\mathbb{L}_3 = (\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$.
   Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

4. Wir suchen die Lösungsmenge der Ungleichung
$$(x-1)^2 \leq |x|.$$
Fall 1: $x \geq 0$
$$(x-1)^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0.$$
Nullstellen des Polynoms:
$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$
bzw. $x_1 = 2.62\ldots$ und $x_2 = 0.38\ldots$
Damit folgt:
$$\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0.$$
Dies ist der Fall, wenn ein Faktor größer und der andere Faktor kleiner 0 ist.
Fall 1a: $x \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x \leq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Es folgt $\mathbb{L} = \emptyset$.
Fall 1b: $x \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x \geq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Es folgt: $\mathbb{L} = \left\{x \middle| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.
Fall 2: $x < 0$
$$(x-1)^2 \leq -x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq -x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{3}{4} \leq 0.$$
Diese Ungleichung besitzt keine reelle Lösung. Es folgt: $\mathbb{L} = \emptyset$.
Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \left\{x \middle| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Quadratische Ungleichungen kann man mit quadratischer Ergänzung in Betragsgleichungen umschreiben und dann die hier beschriebenen Verfahren anwenden.

Beispiel

1. Wir wollen die Lösungsmenge von
$$x^2 + 2x - 3 < 0$$
bestimmen. Quadratische Ergänzung liefert
$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 - 3 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 < 4 \\ \Leftrightarrow |x+1| < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 < x + 1 < 2 \\ \Leftrightarrow \quad -3 < x < 1, & \end{aligned}$$
also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 1\}$ (Abb. 1.9).
2. Wir wollen die Lösungsmenge von
$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$
bestimmen. Quadratische Ergänzung liefert
$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 - 3 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \geq 4 \\ \Leftrightarrow \quad |x+1| \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -3 \text{ oder } x \geq 1, \end{aligned}$$
also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ oder } x \geq 1\}$. ◀

1.10 Reelle Punktmengen

Definition: Beschränktheit einer Menge reeller Zahlen

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge reeller Zahlen. Man nennt D **nach oben** bzw. **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass
$$x \leq K \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq K \qquad \text{für alle } x \in D.$$
Man nennt K eine **obere bzw. untere Schranke** von D.

Die Menge D heißt **beschränkt**, wenn D sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, wenn es also ein $K_o \in \mathbb{R}$ und ein $K_u \in \mathbb{R}$ gibt, mit
$$K_u \leq x \leq K_o \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Ist eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so ist dies gleichbedeutend damit, dass ein $M \geq 0$ existiert, mit der Eigenschaft
$$|x| \leq M \qquad \text{für alle } x \in D.$$
Intervalle illustrieren auf besonders anschauliche Weise beschränkte bzw. teilweise beschränkte Mengen reeller Zahlen. So stellt das rechtsoffene Intervall
$$D := [-1, 2)$$
eine beschränkte Menge dar, die nach oben beispielsweise durch 3 und nach unten beispielsweise durch -2 beschränkt ist. Die Grenzen stellen ebenfalls Schranken dar. So ist -1 die größte untere Schranke, während 2 die kleinste obere Schranke repräsentiert. Die Menge
$$D := [-1, 1] \cup [5, 10]$$
ist ebenfalls sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Jede Zahl $K_1 \geq 10$ stellt eine obere Schranke und jede Zahl $K_2 \leq -1$ eine untere Schranke für D dar.

Das Intervall
$$D := (-\infty, 1)$$
ist nicht nach unten beschränkt, jedoch nach oben durch $K \geq 1$. Damit ist D insgesamt nicht beschränkt. Gibt es, außer der gesamten Menge $\mathbb{R}$, überhaupt Mengen, die weder nach oben noch nach unten beschränkt sind? Betrachtet man beispielsweise die Menge der irrationalen Zahlen
$$D := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$
so stellt man fest, dass es kein $K \in \mathbb{R}$ mit $x \leq K$ oder $x \geq K$ für alle $x \in D$ gilt. Diese Menge ist damit, ebenso wie die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Die Beschränktheitsbegriffe lassen sich nicht nur auf Intervalle anwenden, sondern auch auf andere Mengen reeller Zahlen.

Diskrete Mengen sind abzählbar

Bei der Menge

$$D := \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

handelt es sich um eine diskrete Menge, die zwar unendlich viele Elemente aufweist, die sich aber im Gegensatz zu den Elementen von Intervallen durchnummerieren lassen. Eine derartige Menge nennt man auch **abzählbar**.

Auch die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar, da jede rationale Zahl q eine Darstellung $q = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m \neq 0$ besitzt. Die Zahl q könnte daher mit der zusammengesetzten Zahl $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nummeriert werden.

Man macht sich unmittelbar klar, dass für alle $x \in D$

$$x \leq \frac{1}{1} = 1, \quad x = \frac{1}{n} > 0$$

gilt, da $n \in \mathbb{N}$. Die kleinste obere Schranke von D ist demnach 1, während 0 die größte untere Schranke von D ist.

Achtung Die Elemente von $D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ häufen sich bei $x = 0$, denn in jeder noch so kleinen Umgebung von $x = 0$ liegen unendlich viele Elemente von D. Man spricht von einem **Häufungspunkt** von D. Bei vielen Autoren wird der Begriff der diskreten Menge etwas enger gefasst: Dort sind bei einer diskreten Menge Häufungspunkte ausgeschlossen. ◀

Supremum und Infimum bezeichnen die kleinste obere und die größte untere Schranke einer Menge

Der Begriff der kleinsten oberen Schranke und der größten unteren Schranke führt auf die Definition des Supremums bzw. Infimums einer Menge reeller Zahlen.

Definition: Infimum, Supremum, Minimum und Maximum

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.

- Eine reelle Zahl K heißt **Supremum** oder **kleinste obere Schranke** der Menge D, falls

$$x \leq K \quad \text{für alle } x \in D$$

  und $K - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ keine obere Schranke mehr ist. In diesem Fall wird mit $\sup D = K$ das Supremum von D bezeichnet.
- Eine reelle Zahl K heißt **Infimum** oder **größte untere Schranke** der Menge D, falls

$$x \geq K \quad \text{für alle } x \in D$$

  und $K + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ keine untere Schranke mehr ist. In diesem Fall wird mit $\inf D = K$ das Infimum von D bezeichnet.

Existiert das Supremum bzw. das Infimum einer Menge D, so braucht es nicht notwendig in der Menge D zu liegen. Falls dies aber der Fall ist, spricht man vom Maximum bzw. Minimum von D:

- Das Supremum einer Menge D heißt **Maximum** von D und wird mit $\max D$ bezeichnet, falls $\sup D \in D$.
- Das Infimum einer Menge D heißt **Minimum** von D und wird mit $\min D$ bezeichnet, falls $\inf D \in D$.

Veranschaulichung von Supremum und Infimum

Die folgenden Beispiele veranschaulichen diese Definition:

1. Es sei $a < b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sup[a,b] &= b, & \sup(a,b) &= b \\ \inf[a,b] &= a, & \inf(a,b) &= a \\ \max[a,b] &= b, & &(a,b) \text{ besitzt kein Maximum} \\ \min[a,b] &= a, & &(a,b) \text{ besitzt kein Minimum.} \end{aligned}$$

2. Es sei

$$D = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

   dann gilt

$$\begin{aligned} \sup D &= 1 = \max D, \\ \inf D &= 0, \text{ das Minimum von } D \text{ existiert nicht.} \end{aligned}$$

3. Es sei

$$D = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

   dann gilt

$$\begin{aligned} \sup D &= 1, \text{ das Maximum von } D \text{ existiert nicht,} \\ \inf D &= 0 = \min D. \end{aligned}$$

4. Etwas schwieriger ist der Sachverhalt bei der folgenden Menge zu beurteilen. Es sei

$$\begin{aligned} D &= \left\{x = \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\} \\ &= \left\{\frac{0^2}{2^0} = 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{4} = 1, \frac{9}{8}, \frac{16}{16} = 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \ldots\right\}, \end{aligned}$$

   dann gilt

$$\sup D = \frac{9}{8} = \max D, \quad \inf D = 0 = \min D. \quad ◀$$

Wichtig und nützlich ist bei der Betrachtung von Teilmengen reeller Zahlen in diesem Zusammenhang das folgende Ergebnis:

Teil I

Satz: Existenz des Supremums und des Infimums

Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, also eine kleinste obere Schranke. Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum, also eine größte untere Schranke.

Wir werden diesen Satz später in der Hintergrundbox 4.2 mithilfe einer charakteristischen Eigenschaft der reellen Zahlen, der sog. *Vollständigkeit*, nachweisen.

Aufgaben

1.1 Führen Sie die Elemente der folgenden Mengen explizit auf:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, 0 \le x \le 9\}$
b) $M_2 = \{2k + 1 \in \mathbb{N}_0 \,|\, 0 < k \text{ und } k \le 9\}$
c) $M_3 = \{x \in M_1 \,|\, x < 5 \text{ oder } x \ge 7\}$

1.2 Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, |x - 2| < 2\}$
b) $M_2 = \{x^2 \in \mathbb{R} \,|\, |x + 2| \le 2\}$
c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 2x + 1 < 1\}$
d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2x < x + 1 \le 3x - 2\}$
e) $M_5 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \text{es gibt } q \in [-2, 0) : q^2 = x\}$

1.3 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $x \le 2x$
b) $\frac{1}{x+1} > 2$
c) $\frac{2}{x-2} > 2$
d) $\frac{x+1}{x-1} < 0$
e) $x^2 - 2x < 0$
f) $\frac{1}{2}x \ge x(x + 2) - x^2$
g) $x^2(x + 1) < x^3$
h) $(x^2 + 2)(x - 1) > 0$

1.4 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit:

a) $|2x + 1| - |x - 3| \le 2$
b) $\frac{|x-1|}{|x+1|} < 1$

1.5 Beweisen Sie, dass für alle $x, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{1}{x} < a \iff \begin{cases} x > \frac{1}{a} \text{ oder } x < 0, & \text{falls} \quad a > 0 \\ x > \frac{1}{a} \text{ und } x < 0, & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

sowie

$$\frac{1}{x} > a \iff \begin{cases} x < \frac{1}{a} \text{ und } x > 0, & \text{falls} \quad a > 0 \\ x < \frac{1}{a} \text{ oder } x > 0, & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

1.6

a) Berechnen Sie die Dezimaldarstellung von $x = \frac{2}{11}$.
b) Stellen Sie $x = 0.278$ und $y = 0.\overline{15}$ als gekürzten Bruch dar.
c) Schreiben Sie die Ausdrücke als gekürzten Bruch auf:

$$x_1 = \frac{7}{9} + \frac{5}{11}, \quad x_2 = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{7}{11} : \frac{3}{4}$$

d) Vereinfachen Sie soweit möglich:

$$z_1(x) = \left(\frac{x+3}{x+7}\right) : \left(\frac{x^2-9}{4}\right), \quad z_2 = \frac{5x^2 - 35x}{(2x+1) \cdot (x-7)}$$

1.7 Die Kapazität eines Kondensators mit der Plattenfläche A, dem Plattenabstand d und der elektrischen Feldkonstante ε_0 ist

$$C_a = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Nach Einbringen einer Isolierplatte der Dicke d_1 mit der Permittivitätszahl ε_r ist die Kapazität

$$C_b = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} + \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 A}}.$$

Stellen Sie das Verhältnis der beiden Kapazitäten

$$\frac{C_b}{C_a} = \frac{\frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} + \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 A}}}{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

ohne Doppelbrüche, d. h., mit nur einem Bruchstrich, dar.

1.8

a) Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners

$$x = 64^{\frac{2}{3}}, \quad y = \sqrt[5]{32}.$$

b) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$z(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^{12}}{(x^2-1)^6}}$$

soweit möglich.

c) Stellen Sie die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ nach g um.
d) Es sei r der Radius einer Kugel. Das Volumen der Kugel ist $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Schreiben Sie die Formel in Abhängigkeit des Durchmessers der Kugel $d = 2r$.

1.9

a) Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r beträgt $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Wie groß muss der Radius mindestens sein, wenn das Kugelvolumen mehr als $1\,\mathrm{m}^3$ beträgt?
b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x - 7| < 5$?
c) Für welche $y \in \mathbb{R}$ gilt $|6y + 3| > 5$?

1.10

a) Berechnen Sie $\log_7(10)$.
b) Für welche x gilt $\lg((4x)^2) = 5$?
c) Schreiben Sie den Ausdruck $y = x^{x^2}$ in der Form $y = \mathrm{e}^{f(x)}$.

1.11 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichungen:

a) $\sqrt{x+1} = x$
b) $x - 2 = \sqrt{x}$
c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 2$

1.12 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Exponential- bzw. Logarithmusgleichungen:

a) $\log_{10}(x) = \dfrac{5}{2}$
b) $4^{2x} = 64$
c) $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$