Fachhochschule Münster
Fachbereich Maschinenbau
Prof. Dr. L. Göllmann

MATHEMATIK I - WS 2022/2023
6. ÜBUNGSBLATT LINEARE ALGEBRA

Aufgabe 26

Gegeben sei eine *reguläre* $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{R}$ mit $n \geq 2$. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie unter diesen Umständen *falsch* [F] oder *richtig* [R] ist.

F	R	← Bitte ankreuzen
☐	☐	Es gilt Rang $A = 1$.
☐	☐	Durch elementare Zeilenumformungen kann eine Zeile von A vollständig eliminiert werden, d. h. es kann auf diese Weise eine komplette Nullzeile erzeugt werden.
☐	☐	Das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat unendlich viele Lösungen.
☐	☐	Durch geeignete Spaltenvertauschungen kann A in eine singuläre Matrix überführt werden.
☐	☐	Sind $\vec{v}$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ zwei Löungsvektoren des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, so löst deren Differenz das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$.
☐	☐	Es gibt auf jeden Fall mindestens einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, so dass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ *keine* Lösung besitzt.
☐	☐	Spaltenzahl, Zeilenzahl und Rang der Matrix A stimmen überein.
☐	☐	Für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$ *genau eine* Lösung.
☐	☐	Das Tableau $[A\|E_n]$ ist durch elementare Zeilenumformungen in ein Tableau der Gestalt $[E_n\|*]$ überführbar.
☐	☐	Es gibt keine $n \times\ n$ Matrix B über $\mathbb{R}$ mit $BA = E_n = AB$.
☐	☐	Die Matrix A ist invertierbar.
☐	☐	Es gilt $0 \leq$ Rang $A \leq n - 1$.
☐	☐	Es gibt eine nicht-triviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$.
☐	☐	Eine Matrix B, die aus A durch elementare Zeilen- und/oder Spaltenumformungen hervorgeht, ist ebenfalls regulär.
☐	☐	Das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung, nämlich den Nullvektor.

Aufgabe 27

Das Zieltableau eines inhomogenen Linearen Gleichungsgleichungssystems laute

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Aus wievielen Unbekannten besteht das lineare Gleichungsystem? Geben Sie die Lösungsmenge in der Kurzschreibweise mit den spitzen Klammern ($\langle \ldots \rangle$) an. Geben Sie vier verschiedene

Lösungsvektoren an.

Aufgabe 28

Zeigen Sie für $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathcal{M}(n \times p, \mathbb{K})$, dass $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.

Aufgabe 29

Gegeben Sei die 3×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie zwei reguläre Matrizen $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit

$$TAS = \left(\begin{array}{ccc} E_r & | & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

mit $r = \mathrm{Rang}(A)$

Aufgabe 30

a) Es sei A eine reguläre Matrix. Zeigen sie: A^T ist regulär und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

b) Es seien $A, B, C \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{K})$. Zeigen Sie

   b.a) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

   b.b) $A \sim B \iff \mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}\, B$